



Unidad 4.

Movimiento circular uniforme.

Hasta ahora, habíamos visto en cinemática el **movimiento rectilíneo**, es decir, cuando una partícula se mueve en línea recta. Dijimos que un objeto se mueve en una línea recta, si la fuerza neta que actúa sobre él es paralela a la dirección del movimiento, pero si la fuerza neta **actúa en un ángulo** con respecto a la dirección del movimiento, entonces el objeto se moverá en una trayectoria curva. En esta unidad consideraremos los cuerpos con tamaño y forma definidos que, en general, pueden tener **movimiento rotacional** además del de traslación.

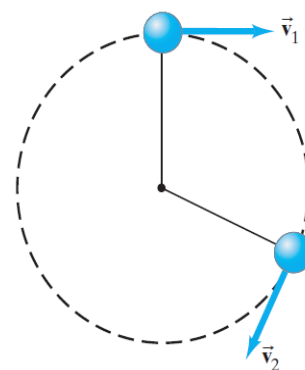
Son ejemplo de este último caso es el movimiento de un proyectil, o un objeto que se mueve en un círculo, como una pelota unida al extremo de una cuerda que gira alrededor de la cabeza de alguien, o el movimiento casi circular de la Luna alrededor de la Tierra.

Se dice que un objeto que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante v experimenta un **movimiento circular uniforme**.

En este caso, **la magnitud** de la velocidad permanece constante; pero la **dirección** de la velocidad cambia continuamente conforme el objeto se mueve alrededor del círculo **fig. 1**.

Fig 1

Un pequeño objeto que se mueve en círculo muestra cómo cambia la velocidad. En cada punto, el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria circular.



4-1: a) Periodo y frecuencia.

A menudo al movimiento circular se le describe en términos de la **frecuencia f** , es decir, el número de revoluciones¹ o vueltas completadas por el móvil en la unidad de tiempo y el **periodo T** de un objeto que se mueve en una trayectoria circular es el tiempo requerido para completar una

¹ Una **“revolución”** indica el número de rotaciones completadas por cada unidad de tiempo por un cuerpo que gira alrededor de un eje. se usa también para expresar **velocidad angular**

revolución. El **periodo** T representa el tiempo necesario para que el móvil complete una vuelta completa. Ambas magnitudes quedan definidas las siguientes expresiones:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{Ecuación 1}$$

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{Ecuación 2}$$

Donde:

f : frecuencia $\left[\frac{\text{rev}}{\text{s}}\right]$

T : periodo [s]

b) Velocidad tangencial:

Por ejemplo, si un objeto gira con una **frecuencia** de $3 \frac{\text{rev}}{\text{s}}$, entonces cada revolución tarda $\frac{1}{3} \text{s}$. Para un objeto que da vueltas en un círculo (de circunferencia $2\pi r$) con rapidez constante v , podemos escribir:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \text{Ecuación 3}$$

Donde:

V : velocidad tangencial $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

R : radio[m]

T : periodo [s]

Puesto que en una revolución el objeto recorre una circunferencia.

c) Velocidad angular

Al analizar el movimiento rotacional, pensemos primero en un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo, es decir, un eje que está en reposo en algún marco de referencia inercial y no cambia de dirección relativa al marco. El cuerpo podría ser una flecha de motor, o una calesita. La **figura 2** muestra un cuerpo rígido (en este caso, la aguja indicadora de un velocímetro) que gira sobre un eje fijo, el cual pasa por el punto O y es perpendicular al plano del diagrama, que llamamos plano xy . Una forma de describir la rotación de este cuerpo sería elegir un punto específico

Aguja de velocímetro (un ejemplo de cuerpo rígido) que gira en sentido antihorario sobre un eje fijo.

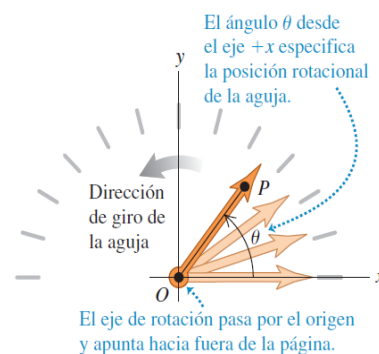


Fig. 2

P del cuerpo y seguir la pista a sus coordenadas x e y . Este método no es el más conveniente, pues

requiere dos números (las dos coordenadas) para especificar la posición rotacional del cuerpo. En vez de ello, observamos que la línea OP está fija en el cuerpo y gira con él. El ángulo θ que esta línea forma con el eje +x describe **la posición rotacional** del cuerpo; usaremos sólo esta cantidad θ como coordenada de rotación.

La coordenada angular θ de un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo puede ser positiva o negativa. Si hacemos que los ángulos positivos se midan en sentido anti horario desde el eje +x, entonces el ángulo θ en la **figura 2** es positivo. En cambio, si elegimos la dirección horaria como la rotación positiva, θ será negativo. Cuando consideramos el movimiento rectilíneo de una partícula, fue indispensable especificar la dirección del desplazamiento positivo sobre esa línea; al analizar la rotación sobre un eje fijo, es igualmente indispensable especificar la dirección de rotación positiva.

Al describir un movimiento rotacional, la forma más natural de medir el ángulo θ no es en grados, sino en radianes. Como se muestra en la **figura 3 a**, un radián (1 rad) es el ángulo trazado en el centro de un círculo por un arco cuya longitud es igual al radio del círculo.

En la **figura 3 b**, un ángulo θ es trazado por un arco de longitud s en un círculo de radio r . El valor de θ (en radianes) es igual:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{Ecuación 4}$$

Un ángulo en radianes es la razón de dos longitudes, así que es un número puro, sin dimensiones.

Si $s = 3.0 \text{ m}$ y $r = 2.0 \text{ m}$, entonces $\theta = 1.5$, pero a menudo escribiremos esto como 1.5 **rad** para distinguirlo de un ángulo medido en grados o revoluciones. La circunferencia de un círculo (es decir, la longitud del arco que rodea el círculo) es 2π veces el radio, así que hay 2π radianes en una revolución completa (360°). Por lo tanto:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$$

Medición de ángulos en radianes.

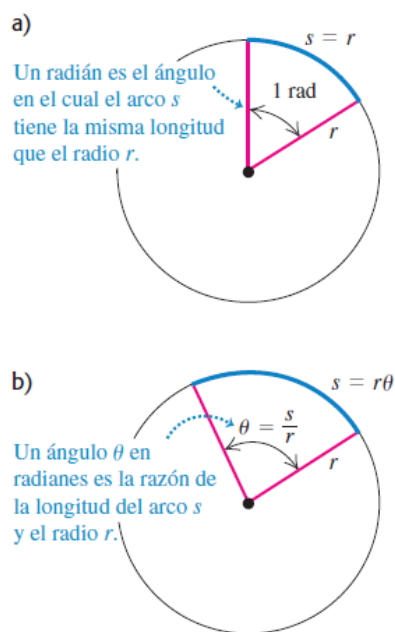


Fig. 3

Asimismo, $180^\circ = \pi \text{ rad}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, etcétera

La coordenada θ de la **figura 2** especifica la posición rotacional de un cuerpo rígido en un instante dado. Podemos describir el **movimiento rotacional del cuerpo** en términos de la razón de cambio de θ , de forma análoga a como describimos el movimiento rectilíneo en la unidad 2. En la **figura 4 a** una línea de referencia OP en un cuerpo que gira forma un ángulo θ_1 con el eje +x en el instante t_1 . En un instante posterior t_2 , el ángulo cambió a θ_2 .

a)

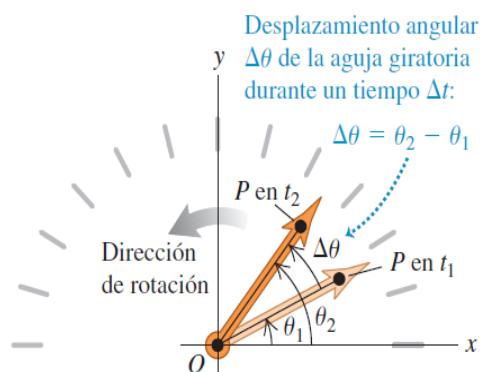


Fig. 4

Definimos la **velocidad angular media** ω_{med-z} (con la letra griega omega) del cuerpo en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como la razón del desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ en Δt :

$$\omega_{med-z} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad \text{Ecuación 5}$$

El subíndice z indica que el cuerpo de la **figura 4 a** está girando en torno al eje z, que es perpendicular al plano del diagrama.

“La velocidad angular es la rapidez con la que varía el ángulo en el tiempo y se mide en radianes por segundos. $2\pi(\text{radianes}) = 360^\circ$ por lo tanto si el ángulo es de 360 grados (una vuelta) y se realiza por ejemplo en un segundo, la velocidad angular es: $2\pi(\text{radianes})$ ”.

La velocidad angular se calcula como la variación del ángulo sobre la variación del tiempo:

De ecuación 3 también podemos afirmar que:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Ejemplo 1: Cuál es la velocidad, en rad/s, de una rueda que gira a 300 r.p.m.? Si el diámetro de la rueda es de 90 cm calcular la velocidad lineal en un punto de su periferia:

a)

$$\omega = 300 \frac{\cancel{\text{rev.}} 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot 1 \cancel{\text{min}}}{\cancel{\text{min.}} 1 \cancel{\text{rev.}} 60 \text{ s}} = 31,42 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b)

$$v = \omega \cdot R = 31,42 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{90 \cancel{\text{cm}} \cdot 1 \text{ m}}{2 \cdot 100 \cancel{\text{cm}}} = 14,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 2: Siendo 30 cm el radio de las ruedas de un coche y 900 las revoluciones que dan por minuto, calcúlese:

a) la velocidad angular de las mismas;

b) la velocidad del coche en m/s y en km/h;

$$\omega = 900 \frac{\cancel{rev.} 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot 1 \cancel{min}}{\cancel{min.} 1 \cancel{rev.} 60 \text{ s}} = 94,25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v = \omega \cdot R = 94,25 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{30 \cancel{cm} \cdot 1 \text{ m}}{100 \cancel{cm}} = 28,27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 28,27 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km} \cdot 3600 \text{ s}}{1000 \text{ m} \cdot 1 \text{ h}} = 101,77 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ejemplo 3: Un coche circula a una velocidad de 90 Km/h, si el radio de las ruedas del coche es de 30 cm calcular:

a) su velocidad lineal en m/s.

b) la velocidad angular de las ruedas en rad /s y r.p.m

a)

$$v = 90 \frac{\cancel{\text{Km}} \cdot 1000 \text{ m} \cdot 1 \cancel{\text{h}}}{\cancel{\text{h}} \cdot 1 \cancel{\text{km}} \cdot 3600 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,3 \text{ m}} = 83,33 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 83,33 \frac{\cancel{\text{rad}} \cdot 1 \text{ rev} \cdot 60 \text{ s}}{\cancel{\text{s}} \cdot 2\pi \cancel{\text{rad}} \cdot 1 \text{ min}} = 795 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

4-2: Aceleración centrípeta.

Como la habíamos dicho al principio de la unidad *“Se dice que un objeto que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante v , experimenta un movimiento circular uniforme”*.

Esto implica que la partícula debe tener una componente de aceleración² perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante. No hay componente de aceleración paralela

² CUIDADO

En el **movimiento circular uniforme** la rapidez es constante, pero la aceleración no es cero.

(tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaria. El vector aceleración es siempre perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro (!nunca hacia fuera!) al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar la rapidez (*fig 5*).

La magnitud de la **aceleración** en el movimiento circular uniforme se relaciona de manera sencilla con la rapidez de la partícula y el radio del círculo y está dada por la expresión:

$$\bar{a} = \frac{v^2}{R} \quad \text{Ecuación 6}$$

Donde:

a = aceleración instantánea o también llamada aceleración centrípeta $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

V = velocidad tangencial instantánea $\left[\frac{m}{s}\right]$

R = radio del círculo $[m]$

Para resumir:

- ✓ Un objeto que se mueve en un círculo de radio R con rapidez constante **v** tiene una aceleración que está dirigida hacia el centro del círculo y cuya magnitud está dada por la **ecuación 6**.
- ✓ Cuanto mayor sea la rapidez v, más rápido cambiará de dirección la velocidad; y cuanto mayor sea el radio, menos rápidamente cambiará de dirección la velocidad.
- ✓ El vector **aceleración** apunta hacia el centro del círculo; sin embargo, el vector **velocidad** siempre apuntará en la dirección de movimiento, que es tangencial al círculo. Así, los vectores de velocidad y de aceleración son perpendiculares entre sí³, en cada punto de la trayectoria para el movimiento circular uniforme *fig. 6*.

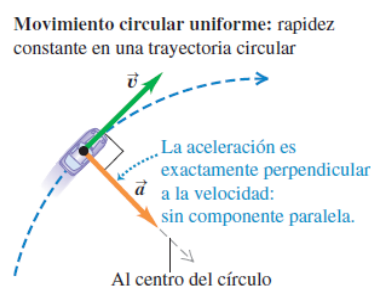


Fig. 5

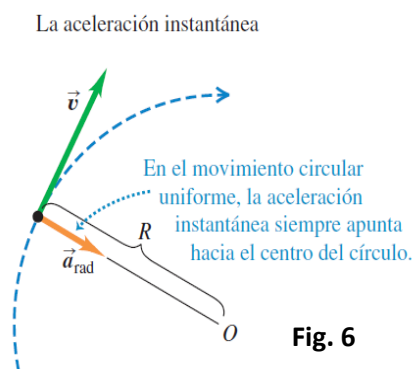


Fig. 6

³ Éste es otro ejemplo que ilustra el error de creer que la aceleración y la velocidad están siempre en la misma dirección. Para un objeto que cae verticalmente y de hecho, son paralelos

Ejemplo 4: Aceleración de una pelota que gira. Una pelota de 150 g unida a una cuerda, gira de manera uniforme en un círculo horizontal de 0.600 m de radio, como se indica en las **figuras 1**. La pelota da 2.00 revoluciones en un segundo. ¿Cuál es su aceleración centrípeta?

Planteo: La aceleración centrípeta es: $\bar{a}_c = \frac{v^2}{R}$

Se nos da **R** y podemos encontrar la rapidez de la pelota, **v** a partir del radio y la frecuencia dados.

Solución: Si la pelota da dos revoluciones completas por segundo, entonces la pelota viaja en un círculo completo en un intervalo de tiempo igual a 0.500 s, que es su periodo **T**. La distancia recorrida en este tiempo es la circunferencia del círculo, $2\pi R$, donde **R** es el radio del círculo. Por lo tanto, la pelota tiene una rapidez:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(6m)}{0,5 s} = 7,54 \frac{m}{s}$$

$$\bar{a}_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(7,54 \frac{m}{s}\right)^2}{6m} = 94,7 \frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 5: Aceleración centrípeta de la Luna. La órbita casi circular de la Luna alrededor de la Tierra tiene un radio aproximado de 384,000 km y un periodo **T** de 27.3 días. Determine la aceleración de la Luna hacia la Tierra.

Planteo De nuevo necesitamos encontrar la velocidad **v** para determinar a_c . Tendremos que convertir a unidades SI para obtener **v** en m/s.

Solución En una órbita alrededor de la Tierra, la Luna recorre una distancia $2\pi R$, donde **R**= 384000 Km lo pasamos a metros:

$$R = \frac{384000 \text{ Km} \cdot 1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 3,8 \times 10^8 \text{ m}$$

El tiempo que se requiere para una órbita completa es el periodo lunar de 27.3 d. La rapidez de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra es:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

El periodo **T** en segundos:

$$T = \frac{23,3 \text{ dias} \cdot 24 \text{ hs} \cdot 3600 \text{ s}}{1 \text{ dia} \cdot 1 \text{ h}} = 2,36 \times 10^6 \text{ s}$$

De ecuaciones 3 y 6

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R)^2}{T^2 R} = \frac{4 \cdot \pi^2 R^2}{R \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2}$$

$$a_c = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3,8 \times 10^8 \text{ m}}{(2,36 \times 10^6 \text{ s})^2} = 2,72 \times 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

3-3: Dinámica del movimiento circular uniforme. Fuerza centrípeta. Peralte. Problemas.

Vimos el movimiento circular uniforme y demostrando que, cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, su aceleración siempre **es hacia el centro del círculo** (perpendicular a la velocidad instantánea). La magnitud a_c de la aceleración es constante y está dada en términos de la rapidez v y el radio R del círculo por:

$$\bar{a}_c = \frac{v^2}{R} \quad \text{Ecuación 6}$$

a) Movimiento circular uniforme

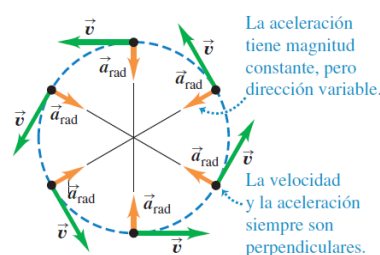


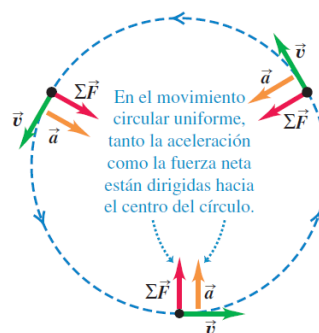
Fig. 6

Cada punto la aceleración siempre es radial hacia el centro del círculo, perpendicular a la velocidad instantánea. Explicamos por qué se le denomina **aceleración centrípeta**⁴.

El movimiento circular uniforme, como todos los movimientos de una partícula, se rige por la **segunda ley de Newton**. Para hacer que la partícula acelere hacia el centro del círculo, la fuerza neta sobre la partícula debe estar dirigida siempre hacia el centro (figura 7). La magnitud de la aceleración es constante, así que la magnitud F_{net} de la fuerza neta también debe ser constante. Si deja de actuar la fuerza neta hacia adentro, la partícula saldrá disparada en una línea recta tangente al círculo.

Fig. 7

En el movimiento circular uniforme, la aceleración y la fuerza neta están dirigidas hacia el centro del círculo.



De acuerdo con la **Segunda Ley de Newton**:

$$\Sigma \vec{F} = m\bar{a}_c \quad \text{Ecuación 7}$$

“Esta dice que si un objeto está acelerado debe haber una fuerza neta no nula actuando sobre él”.

Un objeto que se mueve en un círculo, como una pelota atada al extremo de una cuerda, debe tener una fuerza aplicada sobre el objeto para seguir moviéndose en ese círculo. **Es decir, es necesaria una fuerza neta para darle una aceleración centrípeta.**

⁴ Puesto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama aceleración centrípeta. La palabra “centrípeta” significa “que busca el centro” en griego. La **figura 6** muestra las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme.

La magnitud de la fuerza neta requerida puede calcularse usando la segunda ley de Newton para la componente radial:

$$\sum \vec{F}_c = m\vec{a}_c \quad \text{Ecuación 8}$$

Donde:

a_c es la aceleración centrípeta $a_c = \frac{v^2}{r}$

F_c es la fuerza total (o fuerza neta) en la dirección radial:

$$\sum \vec{F}_c = m\vec{a}_c = m \frac{v^2}{r} \quad \text{Ecuación 9}$$

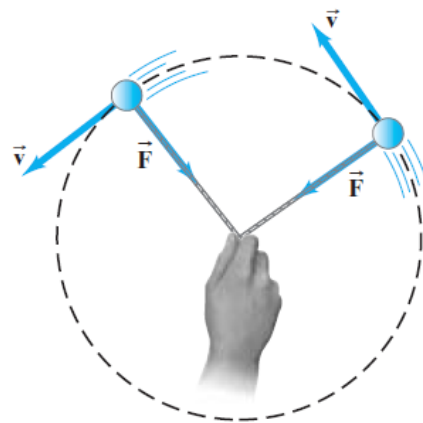
Para el movimiento circular uniforme ($v = \text{constante}$), la aceleración es a_c , que apunta hacia el centro del círculo en cualquier momento. Así, **la fuerza neta también debe estar dirigida hacia el centro del círculo** (figura 8).

Es necesaria una fuerza neta porque, si no hubiera una fuerza neta ejercida sobre el objeto, éste no se movería en un círculo sino en una línea recta, como nos lo indica la primera ley de Newton. La dirección de la fuerza cambia continuamente, de manera que siempre está dirigida hacia el centro del círculo. Esta fuerza se llama a veces **fuerza centrípeta** (“que apunta hacia el centro”). Pero “fuerza centrípeta” no significa algún nuevo tipo de fuerza, el término únicamente describe la **dirección** de la

fuerza neta necesaria para producir una trayectoria circular: la fuerza neta está dirigida hacia el centro del círculo. **La fuerza debe ser aplicada por otros objetos**. Por ejemplo, para hacer girar una pelota atada al extremo de una cuerda, se debe tirar la cuerda y ésta ejerce una fuerza sobre la pelota.

Se tiene la noción **incorrecta** de que cuando un objeto se mueve en un círculo existe una fuerza que actúa sobre él hacia afuera, una fuerza llamada **centrífuga** (“que escapa del centro”). Esto es erróneo: no hay una fuerza hacia afuera sobre el objeto que da vueltas. Por ejemplo, considere a una persona que hace girar una pelota en el extremo de una cuerda alrededor de su cabeza (**Fig. 9**) Si ha hecho usted esto alguna vez, sabrá que se siente sobre su mano una fuerza que tira hacia afuera. La falsa noción surge cuando este tirón se interpreta como una fuerza “centrífuga” (hacia

Fig. 8 Se requiere una fuerza para mantener un objeto moviéndose en un círculo. Si la rapidez es constante, la fuerza está dirigida hacia el centro del círculo.



fuera), que tira sobre la pelota y que se transmite a lo largo de la cuerda hasta su mano. Esto no es lo que sucede en realidad. “Para mantener la pelota moviéndose en un círculo, usted tira hacia adentro la cuerda, que a la vez ejerce la una fuerza sobre la pelota, y por la **tercera ley de Newton**, la pelota ejerce una fuerza igual y opuesta sobre la cuerda, y esta es la fuerza hacia afuera que siente su mano”.

La fuerza sobre la pelota es ejercida hacia adentro sobre ella por usted mediante la cuerda. Como una evidencia aún más convincente de que no actúa ninguna “fuerza centrífuga” sobre la pelota, considere lo que sucede cuando usted suelta la cuerda. Si estuviera actuando una fuerza centrífuga, la pelota saldría volando hacia afuera. Pero no sucede así; la pelota sale volando tangencialmente en la dirección que tenía la velocidad en el momento en que fue soltada, porque la fuerza hacia adentro ya no actúa.



Fig. 9: Movimiento circular de una pelota atada a una cuerda

Ejemplo 6: Fuerza sobre una pelota en rotación (horizontal). Estime la fuerza que una persona debe ejercer sobre una cuerda unida a una pelota de 0.150 kg para que ésta gire en un círculo horizontal de 0.6 m de radio. La pelota gira a 2.00 revoluciones por segundo ($T = 0.500$ s).

Planteo: Primero dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la pelota. Las fuerzas que actúan sobre la pelota son la fuerza de gravedad, hacia abajo, y la fuerza de tensión que ejerce la cuerda hacia la mano en el centro (que ocurre porque la persona ejerce esa misma fuerza sobre la cuerda). El diagrama de cuerpo libre para la pelota se muestra en la **figura 10**. El peso de la pelota complica el asunto y hace imposible que la pelota gire con la cuerda en un plano perfectamente horizontal. Suponemos que el peso es pequeño y hacemos $\theta \approx 0$ en la **figura 10**. Así F_T actuará casi horizontalmente y, en cualquier caso, proporcionará la fuerza necesaria para dar a la pelota su aceleración centrípeta.

Solución Aplicamos la segunda ley de Newton a la dirección radial, que es ahora horizontal:

Fig. 10



$$\sum F_c = ma_c$$

Donde:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Y

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

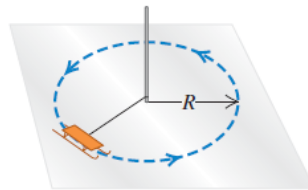
Si $f = \frac{1}{T}$ y $f = 2.0 \frac{rev}{s}$ $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} = 0,5s$

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,6m}{0,5s} = 7,54 \frac{m}{s}$$

$$F_t = 0,150Kg \cdot \frac{\left(7,54 \frac{m}{s}\right)^2}{0,6m} \approx 14N$$

Ejemplo 7: Un trineo con masa de 25.0 kg descansa en una plataforma horizontal de hielo prácticamente sin fricción. Está unido con una cuerda de 5.00 m a un poste clavado en el hielo. Una vez que se le da un empujón, el trineo da vueltas uniformemente alrededor del poste. Si el trineo efectúa 5 revoluciones completas cada minuto, calcule la fuerza F que la cuerda ejerce sobre él.

a) Trineo en movimiento circular uniforme



b) Diagrama de cuerpo libre del trineo



Fig. 11

$$\sum F_c = ma_c$$

Donde:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Y

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

$$\text{Si } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5 \frac{\text{rev}}{\text{min}}} = \frac{0,2 \text{ min} \cdot 60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 12 \text{ s}$$

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5 \text{ m}}{12 \text{ s}} = 2,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

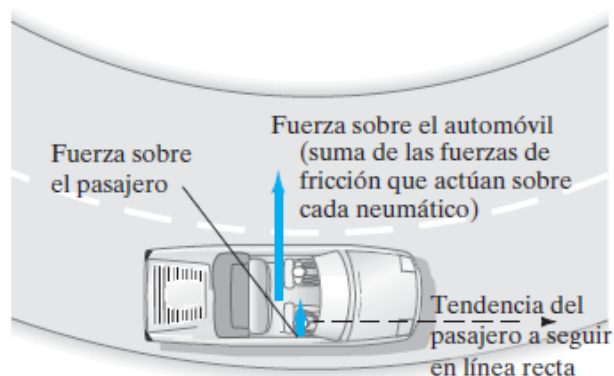
$$a_c = \frac{\left(2,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{5 \text{ m}} = 1,37 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_c = ma_c = 25 \text{ kg} \cdot 1,37 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 34,3 \text{ N}$$

Peralte

Un ejemplo de **aceleración centrípeta** ocurre cuando un automóvil toma una curva. En tal situación, quizás usted sienta que está siendo lanzado hacia afuera, hacia la puerta del otro lado, pero no hay ninguna fuerza centrífuga misteriosa tirando de usted, lo que sucede ***es que usted tiende a moverse en línea recta***, mientras que el automóvil ha comenzado a seguir una trayectoria curva. *Para obligarle a moverse en la trayectoria curva, el asiento (fricción) o la puerta del vehículo (contacto directo) ejercen una fuerza sobre usted (figura 12).* El automóvil mismo debe experimentar una fuerza ejercida sobre él, hacia el centro de la curva, para que se mueva en esa curva. ***En un camino plano, esta fuerza es suministrada por la fricción entre los neumáticos y el pavimento.***

Fig. 12 El camino ejerce una fuerza hacia adentro (fricción en los neumáticos) sobre un automóvil que lo hace moverse en una trayectoria circular. El automóvil ejerce una fuerza hacia adentro sobre el pasajero.



Si las ruedas y los neumáticos del automóvil están girando normalmente sin deslizarse o derraparse, la parte inferior del neumático está en reposo respecto del camino en cada instante; por lo tanto, la fuerza de fricción que ejerce el camino sobre los neumáticos es una fricción estática. Sin embargo, si la fuerza de fricción estática no es lo suficientemente grande, por ejemplo para piso congelado o autos a gran rapidez, la fuerza de fricción no será suficiente para mantener al vehículo en la trayectoria curva y el vehículo se derrapará, desviándose de una trayectoria circular hacia una trayectoria con menor curvatura.

Ejemplo 8: Derrapando sobre una curva. Un automóvil de 1000 kg toma una curva plana de 50 m de radio a una rapidez de 15 m/s (54 km/h). ¿El auto seguirá por la curva o se derrapará? Suponga que a) el pavimento está seco y el coeficiente de fricción estática es $\mu = 0.60$.

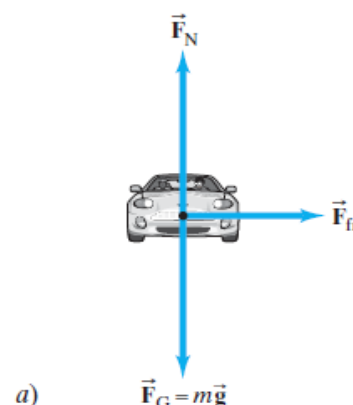
b) el pavimento está cubierto de hielo con $\mu = 0.25$.

Planteo: Las fuerzas sobre el automóvil son la gravedad $P = mg$ hacia abajo, la fuerza normal F_N ejercida hacia arriba por la carretera y una fuerza de fricción horizontal ejercida también por la carretera. Las fuerzas se representan en la **figura 13** que muestra el diagrama de cuerpo libre del auto. Si la fuerza de fricción estática máxima es mayor que la masa del auto por la aceleración centrípeta, éste seguirá moviéndose por la curva.

Solución En la dirección vertical no hay aceleración. La segunda ley de Newton nos indica que la fuerza normal F_N sobre el auto es igual al peso mg :

Fig. 13

Fuerzas sobre un auto en una curva sobre un camino plano. a) Vista frontal. b) Vista superior.



$$F_N = P = m \cdot g = 1000 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9800 \text{ N}$$

En dirección horizontal, la única fuerza que actúa es la fricción, y debemos compararla con la fuerza necesaria para producir la aceleración centrípeta y saber si es suficiente o no. La fuerza horizontal neta requerida para mantener al automóvil moviéndose en un círculo alrededor de la curva es:

$$F_c = ma_c = m \cdot \frac{v^2}{R} = 1000 \text{ kg} \frac{\left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{50 \text{ m}} = 4500 \text{ N}$$

Calculamos ahora la fuerza de fricción estática total máxima (la suma de las fuerzas de fricción que actúan sobre cada uno de los cuatro neumáticos) para saber si es lo suficientemente grande como para brindar una aceleración centrípeta segura. Para a), $\mu = 0.60$, y la fuerza de fricción máxima alcanzable:

$$F_{frmax} = \mu F_N = 0,6 \times 9800 \text{ N} = 5880 \text{ N}$$

Como se necesita sólo una fuerza de 4500 N y de hecho, es lo que ejercerá el camino como fuerza de fricción estática, el automóvil puede tomar la curva sin problemas. Pero en b), la fuerza de fricción estática máxima posible es:

$$F_{fmax} = \mu F_N = 0,25 \times 9.800 N = 2450 N$$

El automóvil derrapará porque el terreno no puede ejercer suficiente fuerza (se requieren 4500 N) para mantenerlo moviéndose en una curva de 50 m de radio a una rapidez de 54 km/h.

El peralte o inclinación transversal en las curvas puede reducir la posibilidad de derrapes. La fuerza normal ejercida por el camino peraltado, actuando perpendicularmente a éste, tendrá una componente hacia el centro del círculo (**figura 12**), reduciendo así la dependencia en la fricción. Para un ángulo peraltado θ , habrá una rapidez para la cual no se requiere ninguna fricción. Éste será el caso cuando la componente horizontal de la fuerza normal hacia el centro de la curva, $F_N \sin \theta$ (véase la figura 13), sea justamente igual a la fuerza requerida para darle a un vehículo la aceleración centrípeta necesaria, es decir, cuando:

$$F_N \sin \theta = m \cdot a_c = m \frac{v^2}{R}$$

No se requiere fricción.

El ángulo de peralte θ de un camino, se elige de manera que esta condición se cumpla para una rapidez particular, llamada “rapidez de diseño”.

Ejemplo 8: Tomar una curva peraltada

Para un automóvil que viaja a cierta rapidez, es posible peraltar una curva con un ángulo tal que los autos que viajan con cierta rapidez no necesiten fricción para mantener el radio con que dan vuelta. El auto podría tomar la curva aun sobre hielo húmedo. Un ingeniero propone reconstruir la curva del ejemplo anterior de modo que un auto con rapidez v pueda dar la vuelta sin peligro aunque no haya fricción (¿Qué ángulo de peralte debería tener la curva?

Curvas peraltadas

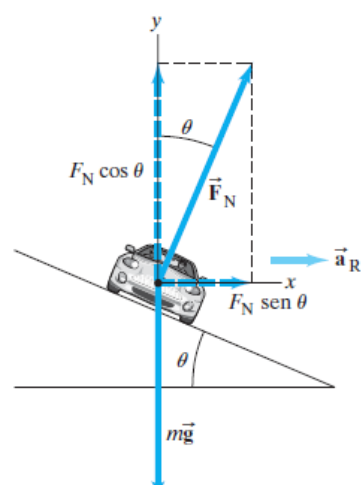
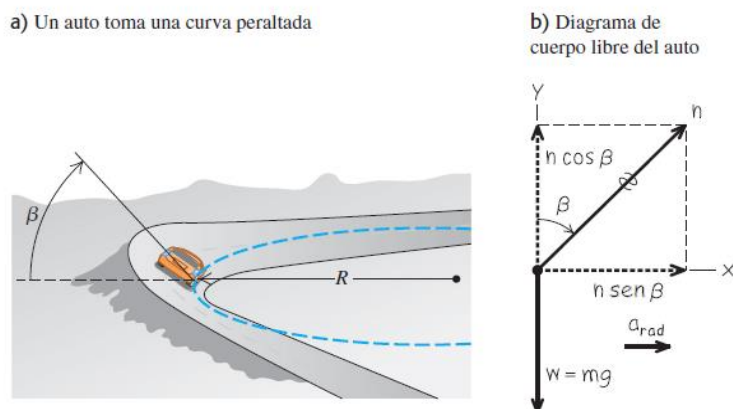


Fig. 12

Fuerza normal sobre un auto en una curva con peralte, descompuesta en sus componentes horizontal y vertical. La aceleración centrípeta es horizontal (y no paralela al camino inclinado). La fuerza de fricción sobre los neumáticos, que no se muestra, podría señalar hacia arriba o hacia abajo de la pendiente, según la rapidez del auto. La fuerza de fricción será cero para una rapidez particular.

IDENTIFICAR: Al no haber fricción, las únicas dos fuerzas que actúan sobre el auto son su peso y la fuerza normal. Puesto que el camino tiene peralte, la fuerza normal (que actúa perpendicular a la superficie del camino) tiene una componente horizontal. Esta componente es la que produce la aceleración horizontal hacia el centro de la trayectoria circular que el auto sigue). Puesto que intervienen fuerzas y aceleración, usaremos la segunda ley de Newton para obtener la incógnita β .

Fig. 13 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.



PLANTEAR: Nuestro diagrama de cuerpo libre (*figura 13b*). La fuerza normal que actúa sobre el auto desempeña el papel de la tensión que actúa sobre la lenteja del péndulo.

EJECUTAR: La fuerza normal es perpendicular a la carretera y forma un ángulo β con respecto a la vertical; por lo tanto, tiene una componente vertical $n \cos \beta$ y una componente horizontal $n \sen \beta$, como se indica en la *figura 13b*. La aceleración en la dirección x es la aceleración centrípeta $a_c = \frac{v^2}{R}$ y no hay aceleración en el eje y. Aplicamos la segunda ley de Newton:

En eje x:

$$\sum F_x = F_N \sen \beta = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_y = F_N \cos \beta - P = 0$$

De a sumatoria en y despejo F_N :

$$F_N = \frac{P}{\cos \beta}$$

La remplazo en la sumatoria en x:

$$\frac{P}{\cos \beta} \sen \beta = m \cdot \frac{v^2}{R} = m g \cdot \tan \beta$$

$$\operatorname{tag}\beta = \frac{v^2}{R \cdot g} = \frac{\left(25 \frac{m}{s}\right)^2}{230m \cdot 9,8 \frac{m}{s^2}}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left[\frac{\left(25 \frac{m}{s}\right)^2}{230m \cdot 9,8 \frac{m}{s^2}} \right] = 15^\circ$$

Este resultado está dentro del intervalo de ángulos de peralte usados en autopistas reales.