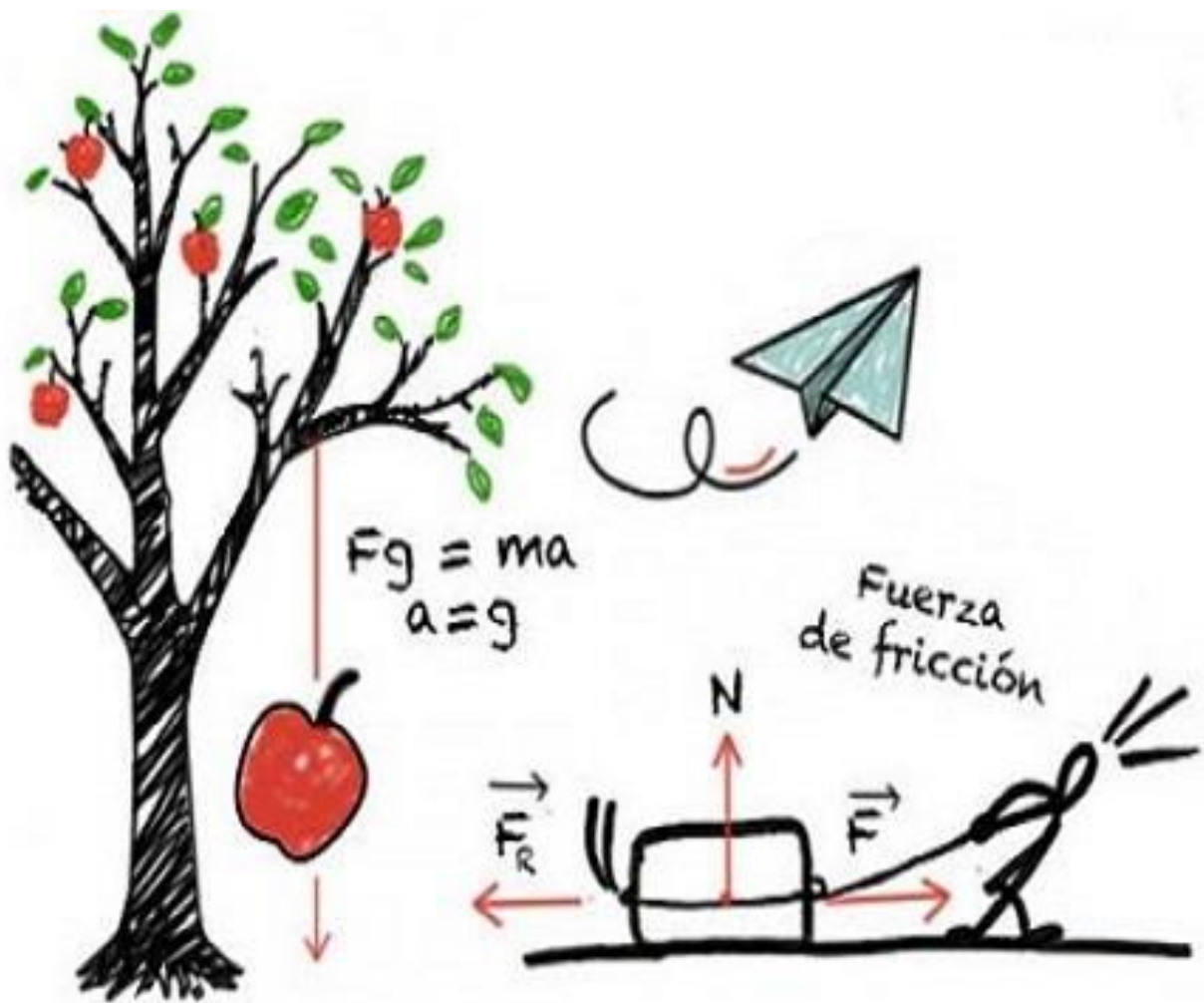




UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias

Física Introductoria



Ing. Luis PESETTI
Ing. Sergio RIBOTTA
Ing. Ricardo MONASTEROLO

El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera bella, no valdría la pena conocerla, y si no ameritara saber de ella, no valdría la pena vivir sin vida.

Henri Poincaré

► **Autores**

Ing. Luis H. PESETTI

(Departamento Ciencias Básicas – Área Física – Física 1)

Ing. Sergio L. RIBOTTA

(Departamento Ciencias Básicas – Área Física – Física 2)

Ing. Ricardo R. MONASTEROLO

(Departamento Ciencias Básicas – Área Física – Física 1)

► **Supervisión pedagógica**

Lic. Sonia Pereyra

Asesora Pedagógica F.I.C.E.S.

► **Corrección**

Ing. Oscar Daniel MORAN

(Departamento Ingeniería – Área Mecánica Aplicada- Robótica)

Prólogo

Este año, la Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico-Sociales (F.I.C.E.S.), se ha propuesto mejorar el nivel de ingreso de los alumnos a esta Facultad, evitando de esta manera uno de los temas preocupantes que es la deserción. Una forma de mejorar el ingreso es tratando de que los alumnos, egresados del secundario, se puedan integrar a la nueva vida universitaria.

Para ello hubo un consenso generalizado entre los docentes de esta Facultad en realizar un Curso Inicial para alumnos ingresantes.

El Área de Física, del Departamento de Ciencias Básicas, contribuye al mejoramiento del ingreso, dictando el Módulo de Nivelación en la asignatura Física para los estudiantes de las carreras de Ingeniería Química, Ingeniería Electricista-Electrónica, Ingeniería Electromecánica e Ingeniería Industrial.

Los temas propuestos para este Curso de Nivelación son los que tradicionalmente se abordan para comenzar con el desarrollo de la materia Física, son temas de la Mecánica: Cinemática, Estática y Dinámica.

Para ayudar a la comprensión de estos temas nos hemos propuesto desarrollarlos en tres capítulos de este texto. Hemos llegado a la conclusión que la mejor manera de alcanzar nuestra meta será tratando los temas dentro de un marco de la organización tradicional y en el orden enunciado en el párrafo anterior.

Sin embargo, y considerando que el curso está dirigido a alumnos ingresantes a las carreras de ingeniería, todos los conceptos físicos que se introducen tienen su aplicación en problemas de Física. En cada módulo se resuelven un gran número de “problemas tipo”, para su mejor comprensión. También al terminar cada capítulo se propone una apreciable cantidad de problemas, de los cuales los impares presentan la solución a fin de generar una autoevaluación.

Consideramos que mediante, la utilización de este texto, la asistencia a las clases teórico-práctica y la resolución de problemas; los alumnos cumplirán con el propósito de este Módulo de Nivelación en Física, que los alumnos ingresen a una carrera universitaria, habiéndose acercado al manejo de algunos de los conceptos fundamentales de la Física.

A los alumnos, les pedimos que no se dejen desalentar, al comienzo, si surge algún inconveniente, nosotros los docentes haremos todo lo que está a nuestro alcance para ayudarlos.

Nuestro más sincero deseo es que usted encuentre la física como una experiencia emocionante y agradable, y que se beneficie de esta experiencia, independientemente de la profesión que haya elegido. Bienvenido al emocionante mundo de la física.

Ing. Luis PESETTI

Ing. Sergio L. RIBOTTA

Ing. Ricardo MONASTEROLO

Objetivos generales

- ☑ Aprender conceptos, principios básicos y teoría de la mecánica.
- ☑ Aprender técnicas para obtener nuevos conocimientos en Física.
- ☑ Desarrollar habilidades en la resolución de problemas y aplicaciones de la vida real.
- ☑ Desarrollar la habilidad de aplicar las leyes aprendidas a nuevos problemas y situaciones.

Estrategia general para la solución de problemas¹¹

En el desarrollo de estrategias para la solución de problemas, se siguen cinco pasos básicos comunes.

- ✎ Dibuje un diagrama con leyendas apropiadas y, si fuera necesario, ejes de coordenadas.
- ✎ Cuando examine lo que se le pide en el problema, identifique el principio (o principios) físico básico que está implícito, listando las cantidades conocidas y las incógnitas.
- ✎ Seleccione una relación básica o deduzca una ecuación que pueda utilizarse para encontrar la incógnita y resuelva simbólicamente la ecuación para la incógnita.
- ✎ Sustituya los valores dados junto con las unidades apropiadas en la ecuación.
- ✎ Obtenga un valor numérico para la incógnita. El problema se verifica y se indica con una marca si las siguientes preguntas pueden contestarse apropiadamente: ¿Concuerdan las unidades? ¿La respuesta es razonable? ¿El signo más o menos es apropiado o incluso es importante?

¹ Raymond A. SERWAY, James Madison University , 1998

ÍNDICE

Física Introdutoria

Capítulo 1

Cinemática lineal

1.1.	Introducción	12
1.2.	Sistemas de referencia	12
1.3.	Posición y desplazamiento	14
1.4.	Velocidad media	16
1.5.	Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)	17
1.5.1.	Representación gráfica	19
1.6.	Velocidad instantánea	23
1.7.	Aceleración	23
1.8.	Movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.)	24
1.9.	Caída libre en el vacío	28
A	Problemas	31

Capítulo 2

Estática

2.1.	Introducción	38
2.2.	Magnitudes escalares y magnitudes vectoriales	38
2.3.	Vectores	39
2.4.	Versores	40
2.5.	Suma de vectores	40
2.5.1.	Métodos gráficos	40
	Método 1: Regla del paralelogramo	40
	Método 2: Método de la poligonal	42
2.5.2.	Métodos analíticos	43
	Método 1: Teorema del coseno y seno	43
	Método 2: Componentes de un vector	46
2.5.3.	Suma de vectores por componentes	49

2.6.	Resta de vectores	51
2.6.1.	Métodos gráficos	51
	Método 1: Regla del paralelogramo	51
2.6.2.	Métodos analíticos	52
	Método 1: Teorema del coseno y seno	52
	Método 2: Método por componentes	53
2.7.	Producto de un vector por un escalar	54
2.8.	Concepto de fuerza	54
2.9.	Sistema de fuerzas coplanares	56
2.10.	Condición de equilibrio de un sistema de fuerzas que actúan sobre un punto	57
2.11.	Momento de una fuerza respecto de un punto	62
2.11.1.	Signo del momento	63
2.12.	Teorema de los momentos	64
B	Problemas	67

Capítulo 3

Dinámica

3.1.	Introducción	74
3.2.	Segunda Ley de Newton - Principio de masa	75
3.3.	Peso y masa	76
3.4.	Sistemas de unidades	77
3.4.1.	Equivalencias	78
3.5.	Primera Ley de Newton - Principio de inercia	82
3.6.	Equilibrio dinámico	82
3.7.	Tercera Ley de Newton - Principio de acción y reacción	84
3.8.	Densidad y peso específico	85
C	Problemas	88
D	Resultados a los problemas impares	91
E	Bibliografía	94

Cinemática lineal

1-1. Introducción

1-2. Sistemas de referencia

1-3. Posición y desplazamiento

1-4. Velocidad media

1-5. Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)

1-6. Velocidad instantánea

1-7. Aceleración

1-8. Movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.)

1-9. Caída libre en el vacío

A. Problemas

Cinemática lineal

1.1. Introducción

El término cinemática proviene del griego *kinema* que significa *movimiento*. *Cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas que producen ese movimiento*. Las causas que producen los movimientos en los cuerpos son las *fuerzas*. Por lo tanto, en cinemática no se consideran las fuerzas que producen los movimientos.

Consideraremos los cuerpos en movimiento, como *cuerpos puntuales*. Se denomina *cuerpo puntual o partícula a aquel elemento cuyas dimensiones son mucho menores que las longitudes involucradas en el movimiento*. Por ejemplo, un automóvil es una partícula cuando considero que se mueve en un viaje desde V. Mercedes a Buenos Aires.

1.2. Sistemas de referencia

Un cuerpo se encuentra en movimiento cuando su posición con respecto a otro, elegido arbitrariamente como referencia, está cambiando al transcurrir el tiempo. Si los cuerpos que se toman como referencia para describir el movimiento, se eligen arbitrariamente, el movimiento dependerá del sistema de referencia que se elija. Un cuerpo puede estar en reposo respecto de una persona y moverse respecto de otra. Por ejemplo, para un pasajero de un colectivo, otros pasajeros que viajan en el mismo colectivo están en reposo, mientras que para una persona que ve pasar el colectivo, los pasajeros del mismo están en movimiento.

En general podemos decir que la característica del movimiento es su *relatividad*. Para decir que un cuerpo se mueve es necesario aclarar respecto de que *sistema de referencia*.

El movimiento puede realizarse sobre una recta es decir en *una dimensión*. El móvil también puede moverse en el plano, en ese caso el movimiento es *bidimensional* o en general el movimiento puede ser en el espacio es decir *tridimensional*.

Para el movimiento en una dimensión ó unidimensional el sistema de referencia consiste en una recta que coincide con la recta sobre la cual se mueve el móvil. En esa recta se elige un punto arbitrario, llamado origen y se gradúa la recta según una escala a conveniencia.

Ejemplo 1-1: En la figura 1-1 cada división representa 3 km. Las posiciones se miden a partir del punto O. El móvil sólo puede moverse a lo largo de la recta X. Si se encuentra a la derecha del punto O, por convenio, el número que indica su posición es positivo, en cambio si se encuentra a la izquierda de O, dicho número es negativo.

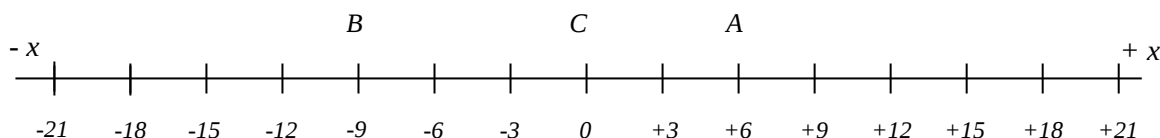


Figura 1-1

El número, junto con la unidad de distancia que se haya elegido se denomina, *abscisa del punto*.

Ejemplo 1-2: Considerando la figura 1-1, si un cuerpo se encuentra en el punto A en un cierto instante, su abscisa será $x = 6 \text{ Km}$, tiempo después si el mismo móvil se encuentra en B, su abscisa será $x = -9 \text{ Km}$, y cuando se halle en C su abscisa será $x = 0 \text{ Km}$.

Para el caso de movimiento en el plano, el sistema de referencia que utilizaremos consiste en dos rectas perpendiculares denominado *sistema cartesiano ortogonal*. El punto de corte de las rectas se elige como origen para medir sobre cada recta.

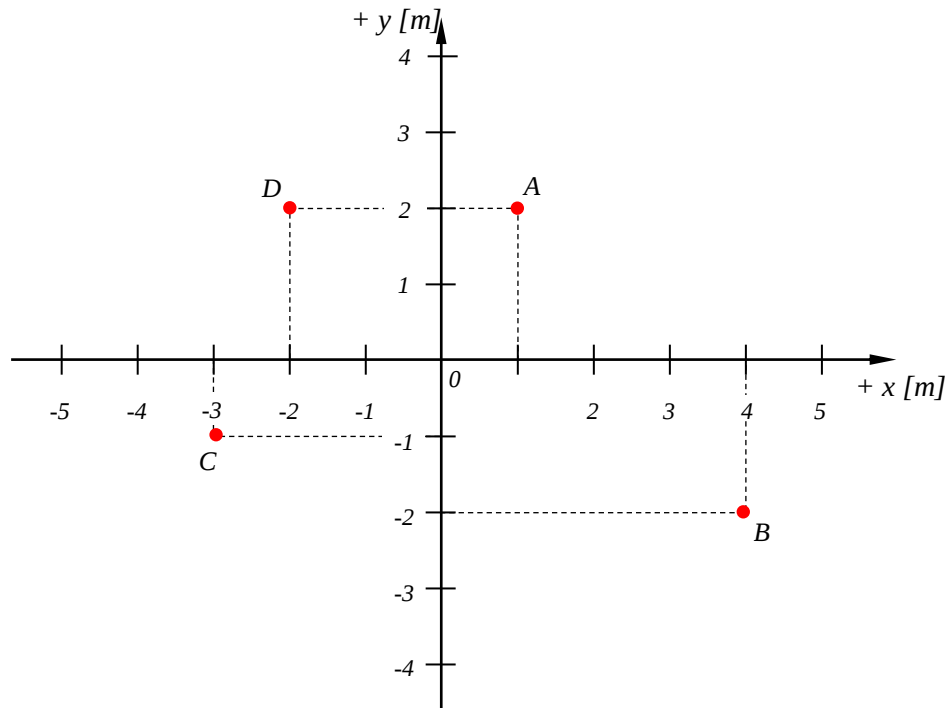


Figura 1-2

En la figura 1-2 se muestra un sistema de referencia para movimientos en el plano de la hoja.

Las rectas x e y son perpendiculares y se cortan en el punto O . A partir de dicho punto y sobre cada una de ellas se gradúan ambas rectas igual que en el caso de una dimensión. En el ejemplo de la figura 1-2 cada centímetro del papel representa un metro en la dimensión real.

Cada recta se denomina *eje*, la horizontal x , *eje de las abscisas* y la vertical y , *eje de las ordenadas*. Se asigna signo en el eje de las abscisas igual que el caso de una dimensión, y para el eje de las ordenadas, positivo por encima del punto O y negativo por debajo del punto O .

Cada posición posible del cuerpo móvil en el plano queda determina por un par de números.

Ejemplo 1-3: Si el cuerpo un cierto instante se encuentra en A, su posición es $x = 1 \text{ m}$ e $y = 2 \text{ m}$, esto se indica de la siguiente manera: $A(1 \text{ m}, 2 \text{ m})$. Análogamente para el caso de que se encuentre en el punto B: $B(4 \text{ m}, -2 \text{ m})$, para el punto C: $C(-3 \text{ m}, -1 \text{ m})$ y para el punto D: $D(-2 \text{ m}, 2 \text{ m})$.

En general, para una posición o punto genérico: $P(x, y)$. El par de números (x, y) se denominan las coordenadas del punto, siendo x la abscisa e y la ordenada.

El valor de cada segmento marcado en los ejes depende de la magnitud del movimiento, puede ser en milímetro [mm], centímetro [cm], metro [m], kilómetro [km], etc.

1.3. Posición y desplazamiento

Estudiaremos solamente movimientos unidimensionales, o sea a lo largo de una recta.

Ya dijimos que la posición de un móvil respecto de un sistema de referencia está indicada por su abscisa x . El valor numérico de x puede cambiar si cambiamos el sistema de referencia. Por eso es importante recalcar que *la posición de un cuerpo vale exclusivamente para el sistema de referencia respecto del cual se la ha determinado*.

Entenderemos por *desplazamiento* a un cambio de posición.

Ejemplo 1-4: En cierto instante t_1 , la posición del cuerpo es $x_1 = 3\text{ m}$, un tiempo después, al instante t_2 , la posición es $x_2 = 11\text{ m}$. Cambió la posición, entonces decimos que hubo desplazamiento.

Veremos de que manera medimos e indicamos el desplazamiento. Cuando hay una variación de alguna magnitud física usaremos una letra griega para indicarlo: Δ (delta), a la derecha de esta letra colocamos la letra que indica la magnitud que ha variado.

Es decir, como indicamos con x la posición, y como el desplazamiento es una variación de la posición, entonces por lo expresado anteriormente, indicaremos el desplazamiento como Δx .

Como se calcula, simplemente haciendo la diferencia entre la posición final y la posición inicial, es decir

$$\Delta x = x_f - x_o \quad (1-1)$$

en donde x_f es la posición final y x_o la posición inicial.

Ejemplo 1-5: Consideremos la siguiente figura.

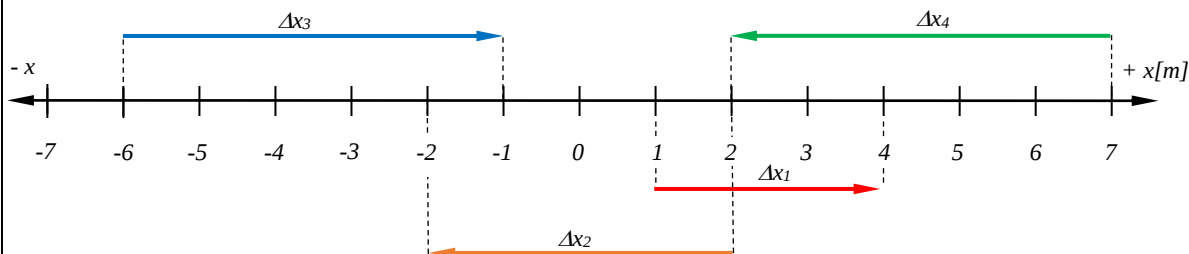


Figura 1-3

$$\Delta x_1 : \quad x_i = 1\text{ m} \quad x_f = 4\text{ m} \quad \Delta x = x_f - x_i = 4\text{ m} - 1\text{ m} = 3\text{ m}$$

$$\Delta x_2 : \quad x_i = 2\text{ m} \quad x_f = -2\text{ m} \quad \Delta x = x_f - x_i = -2\text{ m} - 2\text{ m} = -4\text{ m}$$

$$\Delta x_3 : \quad x_i = -6\text{ m} \quad x_f = -1\text{ m} \quad \Delta x = x_f - x_i = -1\text{ m} - (-6\text{ m}) = 5\text{ m}$$

$$\Delta x_4 : \quad x_i = 7\text{ m} \quad x_f = 2\text{ m} \quad \Delta x = x_f - x_i = 2\text{ m} - 7\text{ m} = -5\text{ m}$$

En la figura 1-3 se ha dibujado un sistema de referencia y desplazados paralelamente los desplazamientos Δx para cada ejemplo. Obsérvese que algunos desplazamientos Δx son negativos y otros positivos. Los que son positivos indican un desplazamiento hacia la derecha (Δx_1 , Δx_3) y los que son negativos hacia la izquierda (Δx_2 , Δx_4). O sea que los desplazamientos pueden ser distintos porque siendo de igual sentido tienen distinta magnitud o si tiene igual magnitud pueden diferir en sentido. Por ejemplo: desplazar un automóvil 3 metros hacia delante no es igual que desplazarlo 3 metros hacia atrás.

A diferencia de la posición, *el desplazamiento no depende del sistema de referencia.*

Supongamos tener una columna de soldados. Si en cierto instante empiezan a marchar en el mismo sentido y manteniendo la formación, un tiempo después todos se habrán desplazado lo mismo, independientemente de su posición en la columna.

Esta información puede ser puesta en tablas y así obtener las denominadas de *tablas posición-tiempo*, de esta manera obtenemos una ecuación horaria $x = f(t)$. También se pueden construir gráficas a partir de ellas, y obtener así las *gráficas de posición-tiempo*.

Ejemplo 1-6: En la Tabla 1-1 en el tiempo $t=0$ el móvil se encuentra en la posición $x=3\text{ m}$, en el tiempo $t=1$ la posición del móvil es $x=5\text{ m}$ y así sucesivamente

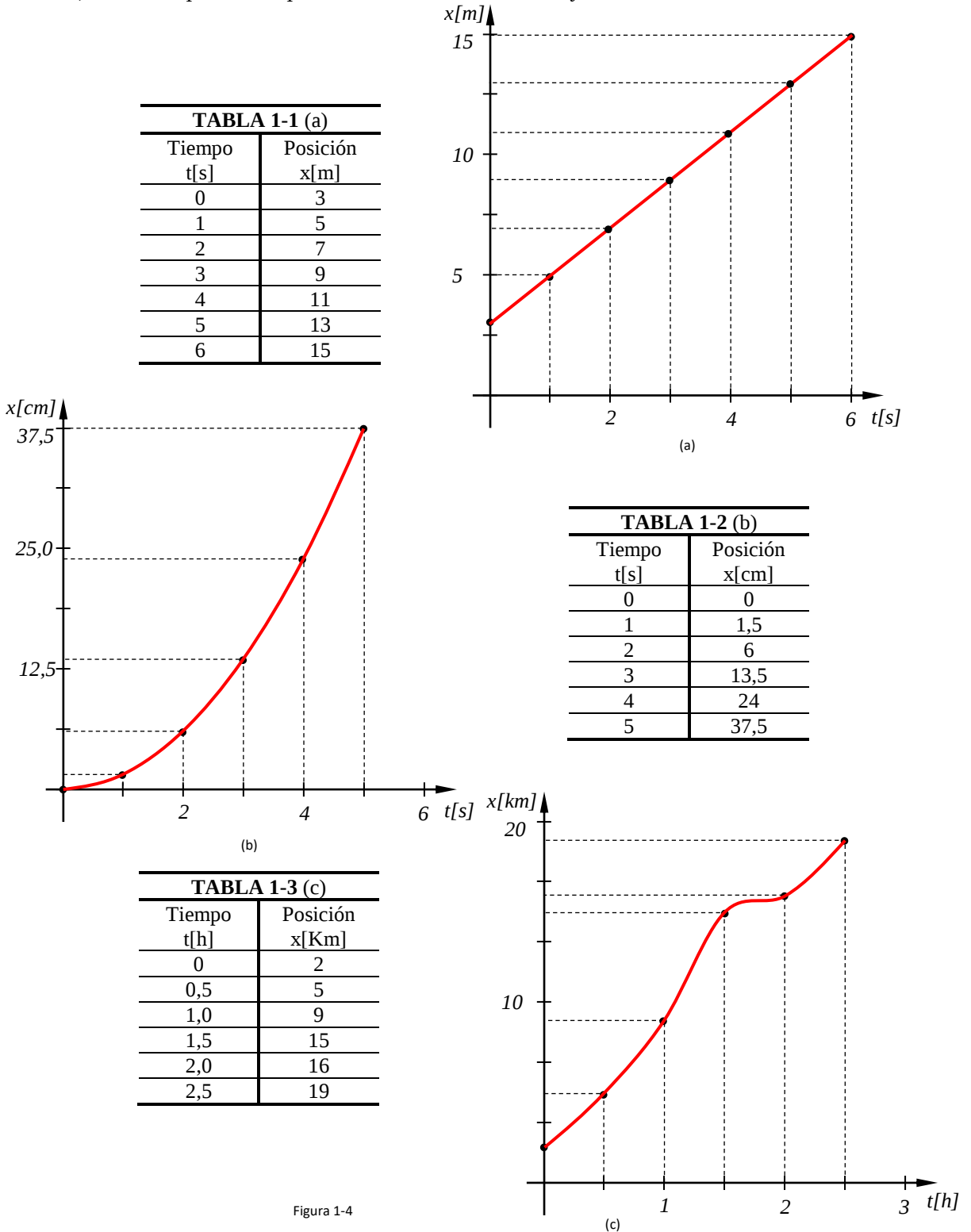


Figura 1-4

En la figura 1-4 se han representado gráficamente los movimientos registrados en las Tablas 1-1, 1-2 y 1-3 respectivamente. Obsérvese que la gráfica 1-4 a) es una semirecta y representa un movimiento uniforme, la 1-4 b) es una curva continua y representa un movimiento uniformemente variado y la 1-4 c) es una curva quebrada y representa un movimiento variado cualquiera.

1-4. Velocidad media

Para que un móvil efectúe un desplazamiento necesita un cierto intervalo Δt . Pero un mismo desplazamiento se puede realizar en mayor o en menor tiempo, o sea más lentamente o más rápidamente.

La magnitud física que relaciona un desplazamiento y el tiempo que se tarda en efectuar ese desplazamiento se denomina *velocidad media en dicho intervalo de tiempo*. La representaremos como V_m , y de acuerdo con su significado se define así:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o sea} \quad V_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad (1-2)$$

Aquí t_f y t_i representan los instantes de tiempo en que el móvil se encuentra en la posición x_f y x_i , respectivamente.

Las unidades de velocidad son las de un espacio sobre tiempo, las más empleadas son

$$V_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \left[\frac{\text{metro}}{\text{segundo}} = \frac{m}{s} \right] \left[\frac{\text{kilómetro}}{\text{hora}} = \frac{Km}{h} \right] \left[\frac{\text{centímetro}}{\text{segundo}} = \frac{cm}{s} \right] \left[\frac{\text{Kilómetro}}{\text{minuto}} = \frac{Km}{min} \right]$$

Ejemplo 1-7:

a) Observemos la Tabla 1-1 y determinemos la velocidad media V_m entre los tiempos $t = 2$ s y $t = 6$ s. De acuerdo con la tabla para un $t_f = 6$ s le corresponde un $x_f = 15$ m y para un $t_o = 2$ s le corresponde un $x_o = 7$ m, entonces utilizando la ecuación 1-2 se obtiene

$$V_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{15 \text{ m} - 7 \text{ m}}{6 \text{ s} - 2 \text{ s}} = \frac{8 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 2 \frac{m}{s}$$

b) Observemos ahora la Tabla 1-2 y determinemos la velocidad media V_m entre los tiempos $t = 2$ s y $t = 5$ s. De acuerdo con la tabla para un $t_f = 5$ s le corresponde un $x_f = 37,5$ m y para un $t_o = 2$ s le corresponde un $x_o = 6$ m, entonces utilizando la ecuación 1-2 se obtiene

$$V_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{37,5 \text{ m} - 6 \text{ m}}{5 \text{ s} - 2 \text{ s}} = \frac{31,5 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 10,5 \frac{m}{s}$$

c) De la Tabla 1-1 determinemos la velocidad media V_m entre los tiempos $t = 1$ s y $t = 5$ s. De acuerdo con la tabla para un $t_f = 5$ s le corresponde un $x_f = 13$ m y para un $t_o = 1$ s le corresponde un $x_o = 5$ m, entonces utilizando la ecuación 1-2 se obtiene

$$V_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{13 \text{ m} - 5 \text{ m}}{5 \text{ s} - 1 \text{ s}} = \frac{8 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 2 \frac{m}{s}$$

(1) La posición o el tiempo inicial se indicará indistintamente con el subíndice o o i , por ejemplo $x_o = x_i$

d) De la Tabla 1-2 determinemos la velocidad media V_m entre los tiempos $t=1\text{ s}$ y $t=4\text{ s}$. De acuerdo con la tabla para un $t_f = 4\text{ s}$ le corresponde un $x_f = 24\text{ m}$ y para un $t_o = 1\text{ s}$ le corresponde un $x_o = 1,5\text{ m}$, entonces utilizando la ecuación 1-2 se obtiene

$$V_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{24\text{ m} - 1,5\text{ m}}{4\text{ s} - 1\text{ s}} = \frac{22,5\text{ m}}{3\text{ s}} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si comparamos los resultados obtenidos con la Tabla 1-1 vemos que son iguales, en cambio los obtenidos con la Tabla 1-2 son distintos. Esta observación se sigue verificando si hacemos otros ejemplos para otros intervalos de tiempo.

La conclusión es que, para algunos movimientos, como el de la Tabla 1-1, el valor de la velocidad media V_m no depende del intervalo del tiempo en que se la calcule, y en otros movimientos como el de la Tabla 1-2 y 1-3, el valor de la velocidad media V_m cambia cuando se calcula para otro intervalo de tiempo Δt .

En otras palabras: el valor de la velocidad media V_m puede o no depender del intervalo de tiempo Δt en que se calcula.

Por lo tanto

Cuando el cálculo de la velocidad media V_m		
NO	depende del intervalo de tiempo Δt entonces el movimiento es	UNIFORME
SI		VARIADO

Como el valor de la velocidad media V_m depende de Δx , puede suceder que Δx sea positivo o negativo. Por lo tanto, cuando la velocidad media $V_m > 0$ significa que el móvil se mueve hacia la derecha. En caso contrario el signo menos está indicando un movimiento hacia la izquierda.

1-5. Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)

En un movimiento rectilíneo uniforme, el móvil recorre desplazamientos iguales en tiempos iguales, cumpliéndose en todo momento la siguiente relación

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \text{constante} \quad (1-2)$$

También puede expresarse, diciendo que, en un movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad media es constante.

Si indicamos la posición inicial x_i con x_0 , y considerando el tiempo con el cual se inicia el movimiento $t_i = 0$, la ecuación 1-2 se reduce a

$$V_m = \frac{x_f - x_0}{t_f}$$

en general podemos expresar la ecuación anterior de la siguiente manera

$$v = \frac{x - x_0}{t} = \text{constante} \quad (1-3)$$

de donde resulta

$$x = x_0 + v t \quad (1-4)$$

y también

$$t = \frac{x - x_0}{v} \quad (1-5)$$

si además consideramos que el móvil parte con $x_0 = 0$, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$v = \frac{x}{t} \quad (1-6)$$

$$x = v t \quad (1-7)$$

$$t = \frac{x}{v} \quad (1-8)$$

Recordamos que las unidades correspondientes a la velocidad pueden ser

$$v = \frac{x}{t} \left[\frac{\text{metro}}{\text{segundo}} = \frac{m}{s} \right] \left[\frac{\text{kilómetro}}{\text{hora}} = \frac{Km}{h} \right] \left[\frac{\text{centímetro}}{\text{segundo}} = \frac{cm}{s} \right] \left[\frac{\text{kilómetro}}{\text{minuto}} = \frac{Km}{min} \right]$$

siendo las dos primeras las más usuales.

Ejemplo 1-8: Si un móvil tiene una velocidad $v = 6 \text{ Km/h}$ y deseamos expresar esta velocidad en m/s , lo realizamos de la siguiente manera

$$v = 6 \frac{Km}{h} \frac{1000 m}{1 Km} \frac{1 h}{3600 s} = 1,67 \frac{m}{s}$$

Ejemplo 1-9: Si un móvil tiene una velocidad $v = 2,3 m/s$ y deseamos expresar esta velocidad en Km/h , procedemos de manera similar al ejemplo anterior

$$v = 2,3 \frac{m}{s} \frac{1 Km}{1000 m} \frac{3600 s}{1 h} = 8,28 \frac{Km}{h}$$

Lo que se debe tener en cuenta al introducir las unidades cuando se plantea un problema, es que se deben trabajar las mismas magnitudes en las mismas unidades.

Ejemplo 1-10: Un automóvil tiene una velocidad de 75 Km/h , ¿qué espacio recorre el automóvil en 3 minutos 20 segundos? Expresar el resultado en m y Km

Datos:

$$v = 75 \text{ Km/h}$$

$$t = 3 \text{ min } 20 \text{ seg}$$

Una forma de resolver este ejemplo es convertir la velocidad expresada en Km/h en m/s , y el tiempo expresado en min y seg en seg , es decir

Incógnita:

$$x = ?$$

$$v = 75 \frac{Km}{h} \frac{1000 m}{1 Km} \frac{1 h}{3600 s} = 20,83 \frac{m}{s}$$

Para hallar el espacio, utilizamos la ecuación 1-7

$$x = v t = 20,83 \frac{m}{s} 200 s = 4166 m$$

$$x = 4166 m \frac{1 Km}{1000 m} = 4,166 Km$$

Otra manera de resolver este ejemplo es dejar la velocidad expresada en Km/h y el tiempo expresado en min y seg convertirlo en h , es decir

$$t = 3 min \frac{1 h}{60 min} + 20 s \frac{1 h}{3600 s} = 0,0555 h$$

Para hallar el espacio, nuevamente utilizamos la ecuación 1-7

1-5-1. Representación gráfica

Podemos realizar una representación gráfica de la expresión 1-4

$$x = x_0 + v t$$

Consideremos que para hacer una representación gráfica se debe primeramente confeccionar una tabla de valores de la ecuación horaria $x = f(t)$. Para ello deberemos asignar un valor a la velocidad v y al espacio inicial x_0 .

Ejemplo 1-11: Caso 1: Supongamos un automóvil que tiene los siguientes datos iniciales, una velocidad $v = 60 Km/h$ y un espacio $x_0 = 20 Km$. Con estos valores la ecuación 1-4 queda

$$x = x_0 + v t = 20 Km + 60 \frac{Km}{h} t$$

TABLA 1-4	
Tiempo $t[h]$	Posición $x[Km]$
0	20
1	80
2	140
3	200
4	260

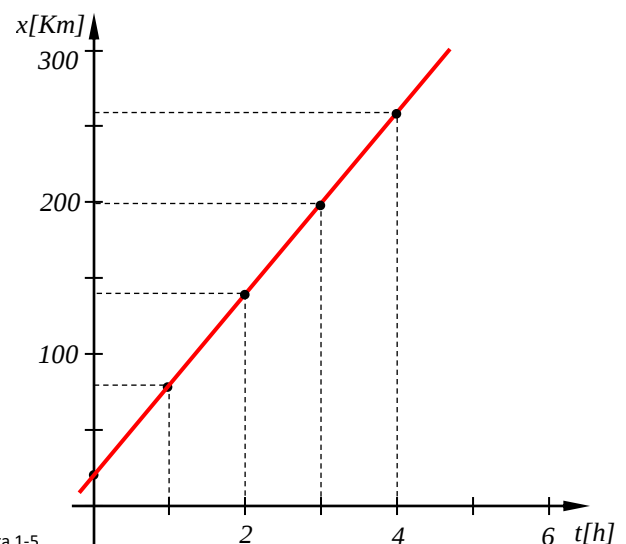


Figura 1-5

En el caso 1 se supuso que el automóvil tiene una velocidad $v = 60 \text{ Km/h}$ y parte desde un punto situado a $x_0 = 20 \text{ Km}$ con respecto del origen de coordenadas, y alejándose de él.

Caso 2: Podemos realizar otra gráfica en la que supongamos que el automóvil tiene los siguientes datos iniciales, una velocidad $v = 40 \text{ Km/h}$ y un espacio $x_0 = 20 \text{ Km}$. Con estos valores la ecuación 1-4 queda

$$x = x_0 + v t = 20 \text{ Km} + 40 \frac{\text{Km}}{\text{h}} t$$

TABLA 1-5	
Tiempo t[h]	Posición x[Km]
0	20
1	60
2	100
3	140
4	180
5	220

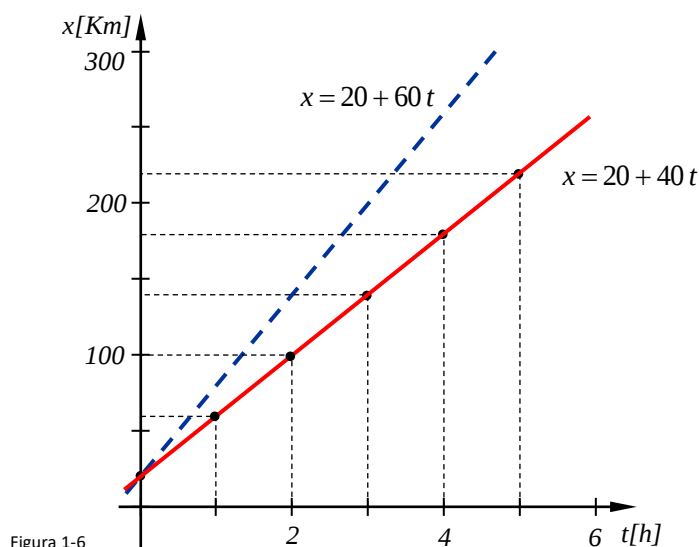


Figura 1-6

Se observa que al ser menor la velocidad en este segundo caso, la recta que representa el movimiento del automóvil tiene una *pendiente o inclinación menor* respecto de un eje.

Caso 3: Podríamos ahora analizar otra gráfica en la que supongamos que el automóvil tiene los siguientes valores iniciales, un espacio $x_0 = 200 \text{ Km}$ y una velocidad $v = 50 \text{ Km/h}$ pero en *dirección contraria* con respecto al caso 1 y 2, es decir dirigiéndose al origen. Con estos valores la ecuación 1-4 queda

$$x = x_0 + v t = 200 \text{ Km} - 50 \frac{\text{Km}}{\text{h}} t$$

TABLA 1-6	
Tiempo t[h]	Posición x[km]
0	200
1	150
2	100
3	50
4	0

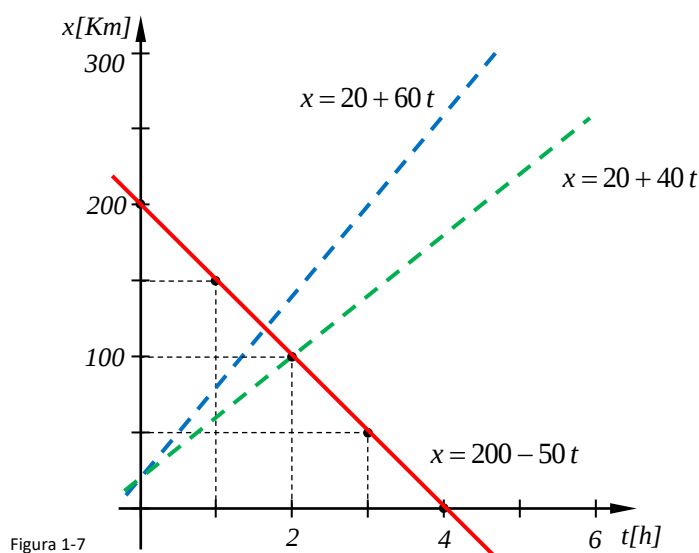


Figura 1-7

Podríamos hacer la representación gráfica de los movimientos de los tres automóviles vistos en este ejemplo, pero representando ahora la velocidad como una función del tiempo, es decir $v = f(t)$.

Cabe observar que estamos analizando móviles cuyo movimiento es rectilíneo uniforme por lo que la velocidad en toda su trayectoria es constante. Por lo tanto, se tiene que

Caso 1: $v = 60 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = \text{constante}$

Caso 2: $v = 40 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = \text{constante}$

Caso 3: $v = -50 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = \text{constante}$

Cabe destacar que el área debajo de la recta (por ejemplo, la correspondiente al caso 1), entre dos tiempos $t_1 = 2 \text{ seg}$ y $t_2 = 5 \text{ seg}$ representa el espacio recorrido por el automóvil en ese intervalo de tiempo, es decir

$$x = v t = 60 \frac{\text{Km}}{\text{h}} 3 \text{ seg} = 180 \text{ Km}$$

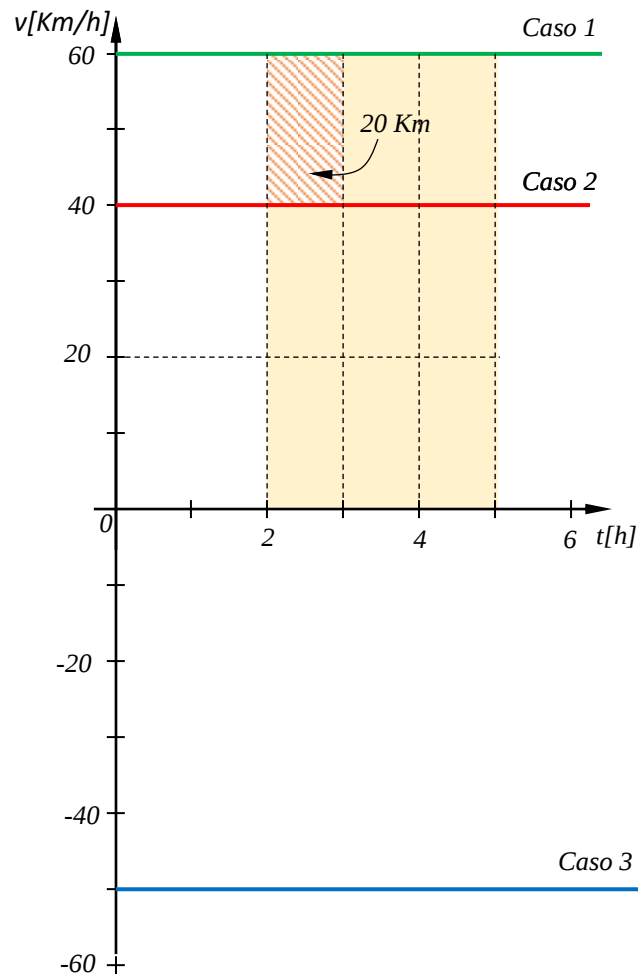


Figura 1-8

Ejemplo 1-12: Un automóvil A pasa por la ciudad de V. Mercedes a las 08:00 hs con una velocidad constante de 80 Km/h. A las 09:30 hs otro automóvil B, con velocidad constante de 100 Km/h pasa también por V. Mercedes en la misma dirección y sentido que el primer móvil. Determinar:

- ¿A qué hora el automóvil B alcanza el automóvil A?
- ¿A qué distancia de V. Mercedes lo alcanza?

Datos:

Automóvil A: $v_A = 80 \text{ Km/h}$ pasando por V. Mercedes a las $t_{A0} = 8 \text{ hs}$

Automóvil B: $v_B = 110 \text{ Km/h}$ pasando por V. Mercedes a las $t_{B0} = 9,5 \text{ hs}$

Incógnitas:

Para cuando el móvil B alcance al móvil A, el espacio recorrido $x_A = ?$ y el tiempo empleado $t = ?$

Resolución analítica: Debido a que consideramos que el movimiento se inicia cuando ambos automóviles pasan por el mismo punto (V. Mercedes), cuando se encuentren los automóviles habrán recorrido ambos el mismo espacio, es decir

$$x_A = x_B$$

y además, considerando que ambos automóviles pasan por el mismo punto (V. Mercedes), pero no en el mismo tiempo, cuando se encuentren los automóviles, los tiempos transcurridos para un móvil y el otro serán diferentes. Podremos escribir entonces que

$$t_B = t_A - 1,5 \quad (\text{sabiendo que } 1,5 \text{ h} = 9,5 \text{ h} - 8 \text{ h})$$

El espacio recorrido por el móvil A es

$$x_A = v_A t_A$$

y el espacio recorrido por el móvil B es

$$x_B = v_B t_B = v_B (t_A - 1,5)$$

igualando ambas expresiones de espacio ($x_A = x_B$, cuando B alcanza a A), tenemos

$$v_A t_A = v_B (t_A - 1,5)$$

$$v_A t_A = v_B t_A - v_B 1,5$$

$$v_A t_A - v_B t_A = -v_B 1,5$$

$$t_A (v_A - v_B) = -v_B 1,5$$

$$t_A = \frac{-v_B 1,5}{v_A - v_B} = \frac{-110 \text{ Km/h } 1,5 \text{ h}}{(80 - 110) \text{ Km/h}} = 5,5 \text{ h} \quad \text{en realidad } t_A = 8 \text{ h} + 5,5 \text{ h} = 13,5 \text{ h}$$

y

$$t_B = t_A - 1,5 = 5,5 \text{ h} - 1,5 \text{ h} = 4 \text{ h}$$

y el espacio recorrido

$$x_A = v_A t_A = 80 \frac{\text{Km}}{\text{h}} 5,5 \text{ h} = 440 \text{ Km}$$

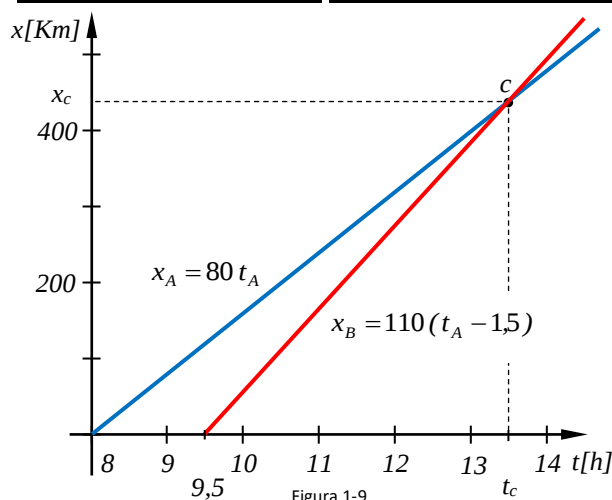
Resolución gráfica: Se traza la recta correspondiente al espacio recorrido por el móvil A desde el origen a partir de las 08:00 h, Tabla 1-7.

$$x_A = 80 t_A$$

Luego a partir de las 09:30 h, es decir 1,5 h después se traza la recta del espacio correspondiente al móvil B, que tiene una pendiente mayor por ser mayor la velocidad con respecto al móvil A, Tabla 1-8.

$$x_B = 110(t_A - 1,5)$$

TABLA 1-7		TABLA 1-8	
Tiempo t_A [h]	Posición x_A [km]	Tiempo t_B [h]	Posición x_B [km]
0	0	0	0
3	240	2	220



1-6. Velocidad instantánea

En un movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) la velocidad media es constante y se define como vimos a través de la ecuación 1-2,

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \text{constante}$$

de todas maneras, no siempre la velocidad es constante, y en algunos casos la velocidad es variable, esto implica que si se toma la velocidad media en un determinado lugar de la trayectoria obtenemos la velocidad media v_{m1} y si lo tomamos en otro lugar de la trayectoria obtendremos una velocidad media v_{m2} , distinta a v_{m1} .

Si se toma el intervalo de tiempo $t_f - t_i$ cada vez más corto en la determinación de la velocidad media se transformará en *velocidad instantánea* v , es decir

$$v_m \rightarrow v \quad \text{si} \quad (t_f - t_i) \rightarrow 0$$

En un movimiento donde la velocidad no es constante se denomina *movimiento variable*.

Las lecturas que se hacen a través de un velocímetro de un auto son valores de velocidad instantánea. Cuando un automóvil arranca, la velocidad va variando continuamente, tenemos por lo tanto un movimiento variable.

1-7. Aceleración

Cuando se tiene un movimiento rectilíneo donde la velocidad está cambiando en el tiempo, aparece una nueva magnitud denominada *aceleración*, y se define como

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \quad (1-9)$$

a la cantidad $v_f - v_i$ se denomina variación de la velocidad. Si $v_f - v_i > 0$ en este caso la aceleración a es positiva y decimos que el cuerpo está *acelerando*; caso contrario si $v_f - v_i < 0$ la aceleración a será negativa, entonces decimos que el cuerpo está *desacelerando* o *frenando*.

Las unidades de la aceleración a son las de la velocidad sobre tiempo, o sea

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \left[\frac{\text{metro}}{\text{segundo}^2} = \frac{m}{s^2} \right] \left[\frac{\text{kilómetro/hora}}{\text{segundo}} = \frac{Km/h}{s} \right] \left[\frac{\text{centímetro}}{\text{segundo}^2} = \frac{cm}{s^2} \right]$$

entre las más usuales.

Ejemplo 1-13: Un automóvil que tiene una velocidad de 90 Km/h frena en 10 segundos disminuyendo la velocidad a 60 Km/h. Determinar la aceleración expresada en m/s^2 , cm/s^2 y $Km/h/s$.

Datos:

$$v_0 = 90 \text{ Km/h} = 25 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 10 \text{ s}$$

$$v_f = 60 \text{ Km/h} = 16,67 \text{ m/s}$$

Incógnita:

$$a = ?$$

La aceleración se puede determinar a través de la ecuación 1-9

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} = \frac{(16,67 - 25) \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = -0,833 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = -0,833 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = -83,3 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

1-8. Movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.)

Cuando la velocidad varía uniformemente en el tiempo decimos que el movimiento es uniformemente variado.

También podemos decir que un movimiento es rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.) cuando la aceleración es constante, es decir

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \text{constante} \quad (1-10)$$

Si consideramos en la ecuación 1-10 que $t_i = 0$, nos queda

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f} \quad (1-10')$$

de donde

$$v_f = v_i + a t_f \quad (1-11)$$

la expresión 1-11, representa la ecuación horaria de la velocidad en todo momento.

Ejemplo 1-14: Un móvil tiene una velocidad inicial de 18 m/s y frena con una aceleración constante de 2 m/s^2 . Determinar

- la velocidad del móvil a los 3 segundos
- ¿en que tiempo el móvil se detiene?

Datos:

$$v_0 = 18 \text{ m/s}$$

$$a = -2 \text{ m/s}^2$$

$$\text{a) } t = 3 \text{ s}$$

$$\text{b) } v_f = 0$$

La aceleración es negativa debido a que el móvil se frena.

a) Para hallar la velocidad final a los 3 s, utilizamos la ecuación 1-11

Incógnitas:

$$\text{a) } v_f = ?$$

$$\text{b) } t = ?$$

$$v_f = v_0 + a t_f = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 3 \text{ s} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Como el móvil se frena, es decir que la $v_f = 0$, entonces utilizando la ecuación 1-11

$$v_f = v_0 + a t_f$$

$$0 = v_0 + a t_f$$

Podemos realizar una representación gráfica de la ecuación horaria 1-11

$$v_f = v_i + a t_f$$

Para ello debemos confeccionar la tabla de valores correspondiente a $v = f(t)$

Ejemplo 1-15: Representar en un sistema de ejes coordenados $v-t$ la ecuación 1-11. Suponer los siguientes casos: a) $v_0 = 5 \text{ m/s}$ y $a = 3 \text{ m/s}^2$ cte b) $v_0 = 12 \text{ m/s}$ y $a = -2 \text{ m/s}^2$ cte

a) $v_f = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t_f$

TABLA 1-9	
Tiempo $t[\text{s}]$	Velocidad $v[\text{m/seg}]$
0	5
1	8
2	11
3	14
4	17

b) $v_f = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t_f$

TABLA 1-10	
Tiempo $t[\text{s}]$	Velocidad $v[\text{m/seg}]$
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2
6	0

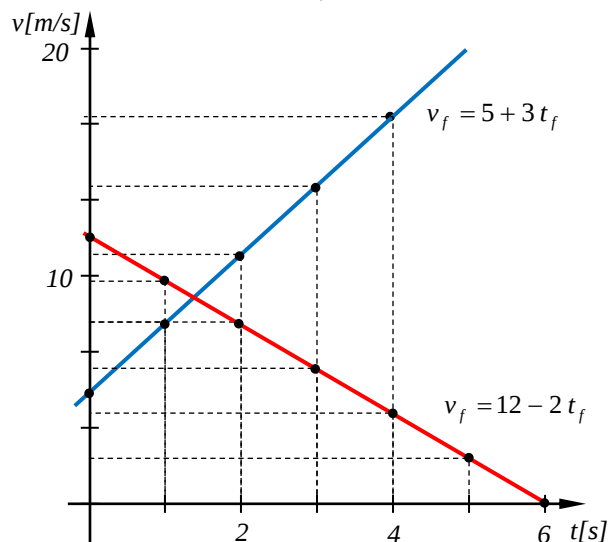


Figura 1-10

La representación gráfica de la velocidad en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.) es una recta con pendiente positiva si la aceleración es positiva y pendiente negativa la aceleración es negativa.

Como la velocidad en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado varía uniformemente con el tiempo, podemos calcular el espacio x multiplicando la velocidad promedio $\bar{v}$ (en ese intervalo x) por el tiempo, es decir

$$x = \bar{v} t$$

pero

$$\bar{v} = \frac{v_i + v_f}{2}$$

reemplazando $\bar{v}$ en la ecuación anterior, se tiene

$$x = \frac{v_i + v_f}{2} t \quad (1-12)$$

pero $v_f = v_i + a t_f$ (ecuación 1-11)

$$x = \frac{v_i + v_i + a t}{2} t = \frac{2 v_i + a t}{2} t = \frac{2 v_i}{2} t + \frac{a t}{2} t$$

finalmente

$$x = v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1-13)$$

si suponemos que $v_i = 0$, entonces la ecuación 1-13 se reduce a

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \quad (1-14)$$

Las expresiones 1-13 y 1-14 son las ecuaciones horarias del espacio en función del tiempo.

Ejemplo 1-16: Un automóvil tiene una velocidad de 100 Km/h , frena con M.R.U.V. y se detiene al cabo de 50 segundos . Determinar:

- la aceleración
- el espacio recorrido

Datos:

$$v_0 = 100 \text{ Km/h}$$

$$\Delta t = 50 \text{ s}$$

$$v_f = 0$$

a) La aceleración del móvil la determinamos mediante la ecuación 1-10

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{0 - 27,78 \text{ m/s}}{50 \text{ s}} = -0,55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Incógnitas:

$$\text{a) } a = ?$$

b) Para calcular el espacio recorrido utilizamos la expresión 1-13

$$\text{b) } x = ?$$

$$x = v_i t + \frac{1}{2} a t^2 = 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}} 50 \text{ s} - \frac{1}{2} 0,55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 50^2 \text{ s}^2 = 694,5 \text{ m}$$

También se podría haber calculado el espacio a través de la ecuación 1-12

$$x = \frac{v_i + v_f}{2} t = \frac{27,78 \text{ m/s} + 0}{2} 50 \text{ s} = 694,5 \text{ m}$$

Otra expresión para determinar el espacio en un movimiento M.R.U.V., se obtiene a partir de la ecuación 1-10'

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f}$$

despejando el tiempo, se tiene

$$t_f = \frac{v_f - v_i}{a}$$

y reemplazándolo en la ecuación 1-12, se obtiene

$$x = \frac{v_i + v_f}{2} t = \frac{v_i + v_f}{2} \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{v_f^2 + v_f v_i - v_i v_f - v_i^2}{2 a} = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2 a}$$

de donde

$$v_f^2 = v_i^2 + 2 a x \quad (1-15)$$

Ejemplo 1-17: Representar en un sistema de ejes coordenados $x-t$ la ecuación 1-13. Suponer los siguientes casos: a) $v_0 = 5 \text{ m/s}$ y $a = 3 \text{ m/s}^2$ cte b) $v_0 = 12 \text{ m/s}$ y $a = -2 \text{ m/s}^2$ cte

a) $x = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} t + \frac{1}{2} 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$

TABLA 1-11	
Tiempo $t[\text{s}]$	Espacio $x[\text{m}]$
0	0
1	6,5
2	16
3	28,5
4	44

b) $x = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} t - \frac{1}{2} 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$

TABLA 1-12	
Tiempo $t[\text{s}]$	Espacio $x[\text{m}]$
0	0
1	11
2	20
3	27
4	32
5	35

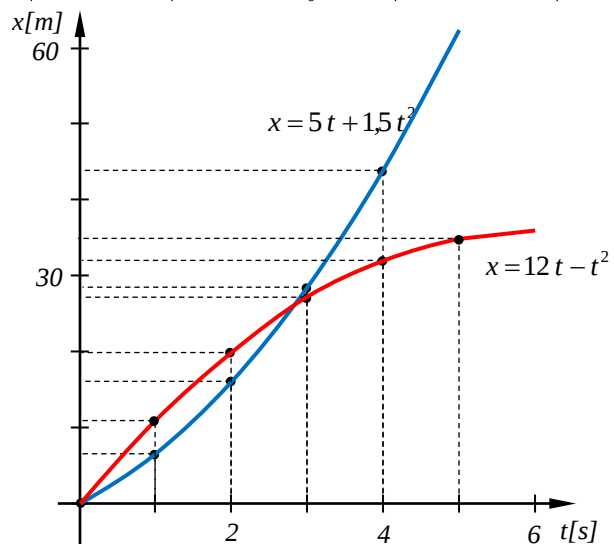


Figura 1-11

Ejemplo 1-18: Un móvil recorre 500 metros en 40 segundos acelerando uniformemente desde el reposo. Determinar:

- la aceleración
- la velocidad final

Datos:

$x = 500 \text{ m}$

$\Delta t = 40 \text{ s}$

$v_0 = 0$

Incógnitas:

a) $a = ?$

a) Para calcular la aceleración con los datos disponibles, emplearemos la ecuación 1-13

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$a = 2 \frac{x - v_0 t}{t^2} = 2 \frac{500 \text{ m} - 0}{40^2 \text{ s}^2} = 0,625 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) $v_f = ?$

b) La velocidad final la obtenemos a partir de la ecuación 1-11

$$v_f = v_o + a t = 0 + 0,625 \frac{m}{s^2} 40 s = 25 \frac{m}{s}$$

Ejemplo 1-19: Representar en un sistema de ejes coordenados *aceleración-tiempo* para un movimiento rectilíneo uniformemente variado. Suponer que $a = 3 m/s^2$

Debido a que estamos en presencia de un M.R.U.V. el cual tiene como característica que $a = constante$, la representación gráfica de la aceleración en función del tiempo es una recta paralela al eje del tiempo.

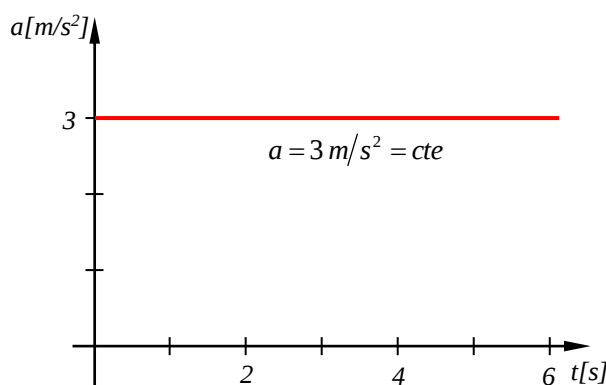


Figura 1-12

1-9. Caída libre en el vacío

Supongamos tener un cuerpo a una determinada altura con respecto al piso. Si dejamos libre el cuerpo, este bajo la acción del *peso*, cae.

¿Cómo es la caída? Sabemos que se produce por la acción de la fuerza peso.

Pero para entender como es la caída, podríamos dejar caer un cuerpo en la atmósfera y observaremos lo siguiente:

a) *La caída es vertical.* Si dejamos caer por ejemplo una bolita de hierro y una hoja de papel, veremos que la bolita cae más rápido que la hoja de papel, eso se debe a la acción del *rozamiento* del aire sobre los cuerpos. Si tomamos, ahora, la misma hoja de papel y la transformamos en una bola bien compacta, veremos que la caída de este es aproximadamente igual a la que tuvo la bolita de hierro. Luego, si extraemos el aire (es decir hacemos vacío) podemos concluir que: *todos los cuerpos caen, en el vacío, con la misma velocidad.*

b) *La velocidad no es constante.* La velocidad aumenta uniformemente a medida que el cuerpo cae. Luego no es un movimiento rectilíneo uniforme, sino que es un movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.). Entonces podemos enunciar que: *la caída de los cuerpos, en el vacío, es un movimiento uniformemente acelerado.*

c) *La aceleración de la caída es constante* y se denomina *aceleración de la gravedad* y vale $g = 9,8 m/s^2$.

De acuerdo con lo expuesto en los puntos anteriores, por ser el movimiento de caída de los cuerpos un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se pueden utilizar las mismas fórmulas empleadas anteriormente para el M.R.U.A., en donde deberá

reemplazarse la aceleración a por la aceleración de la gravedad g , y el espacio x por la altura h (o y).

Esto se puede apreciar en la tabla 1-13

TABLA 1-13			
Movimiento rectilíneo de cuerpos		Caída libre de los cuerpos	
$v_f = v_i + a t_f$	1-11	$v_f = v_i \pm g t_f$	1-16
$x = \frac{v_i + v_f}{2} t$	1-12	$h = \frac{v_i \pm v_f}{2} t$	1-17
$x = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$	1-13	$h = v_i t \pm \frac{1}{2} g t^2$	1-18
$v_f^2 = v_0^2 + 2 a x$	1-15	$v_f^2 = v_0^2 \pm 2 g h$	1-19

En las ecuaciones correspondientes a caída libre de los cuerpos se utilizará el signo $+$ en el caso en que se *deja caer* el cuerpo (v_0 tiene igual signo que la aceleración de la gravedad g), figura 1-13 a). Caso contrario, se utilizará el signo $-$ si se *arroja hacia arriba* el cuerpo (v_0 tiene signo contrario que la aceleración de la gravedad g), figura 1-13 b).

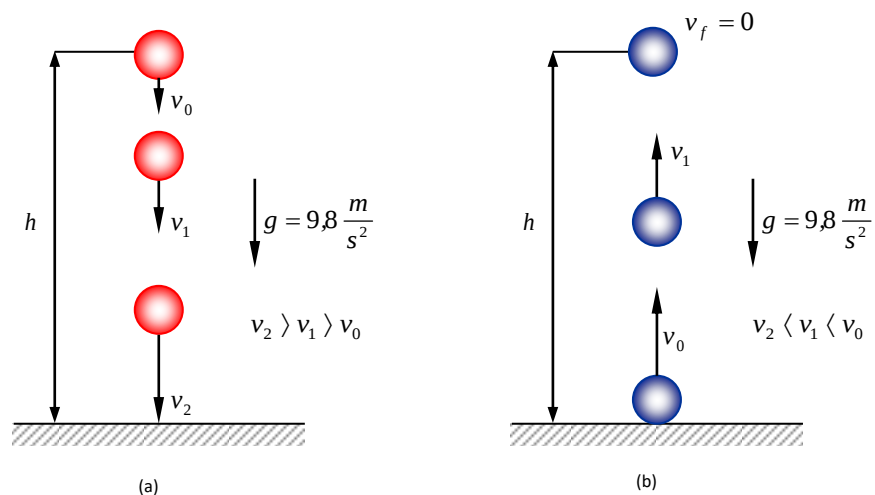


Figura 1-13

Ejemplo 1-20: Se deja caer un cuerpo en caída libre y tarda 10 segundos en caer.

Determinar:

- la velocidad final
- la altura desde donde cae

Datos:

$$t = 10 \text{ s}$$

$$v_0 = 0$$

Incógnitas:

$$\text{a) } v_f = ?$$

$$\text{b) } h = ?$$

a) Para calcular la velocidad final de la caída libre emplearemos la ecuación 1-16 con signo positivo debido a que el cuerpo es lanzado hacia abajo

$$v_f = v_0 + g t = 0 + 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 10 \text{ s} = 98 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Para determinar la altura utilizaremos la expresión 1-18

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 0 + \frac{1}{2} 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 10^2 \text{ s}^2 = 490 \text{ m}$$

Ejemplo 1-21: Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 42 m/s. Calcular:

- el tiempo empleado en alcanzar la altura máxima
- la altura máxima alcanzada
- la velocidad con que llega al suelo el cuerpo
- el tiempo que emplea en caer

Datos:

$$v_0 = 42 \text{ m/s}$$

Incógnitas:

- $t_{h_{\text{máx}}} = ?$
- $h_{\text{máx}} = ?$
- $v_f = ?$
- $t_{\text{caída}} = ?$

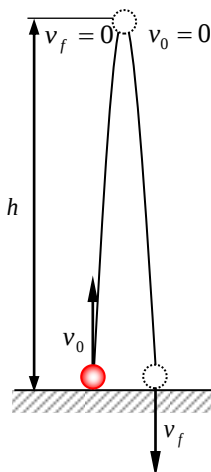


Figura 1-14

a) Para calcular el tiempo en alcanzar la altura máxima emplearemos la ecuación 1-16 con signo negativo debido a que lanzamos hacia arriba el cuerpo. Recordamos también que cuando el cuerpo alcance la posición máxima la velocidad $v_{f \text{ h máx}} = 0$, entonces

$$v_f = v_0 - g t$$

$$0 = v_0 - g t$$

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{42 \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 4,28 \text{ s}$$

b) Para determinar la altura máxima utilizaremos la expresión 1-18 (o la ecuación 1-19)

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 42 \frac{\text{m}}{\text{s}} 4,28 \text{ s} - \frac{1}{2} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 4,28^2 \text{ s}^2 = 90 \text{ m}$$

c) Para calcular la velocidad final con que cae, podemos suponer que el cuerpo se lo deja caer desde una altura igual a $h_{\text{máx}} = 90 \text{ m}$ con velocidad inicial $v_0 = 0$, por lo tanto, emplearemos la ecuación 1-16 ahora con signo positivo debido a que lanzamos hacia abajo el cuerpo, entonces

$$v_f = v_0 + g t = 0 + 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 4,285 \text{ s} \cong 42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

como conclusión podemos decir que el cuerpo cae con la misma velocidad con que fue arrojado.

d) De manera similar a como analizamos en el punto c), determinaremos el tiempo de caída utilizando la ecuación 1-18

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 0 + \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90 \text{ m}}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 4,28 \text{ s}$$

como conclusión vemos que el cuerpo emplea el mismo tiempo al bajar que el que emplea para subir.

Por lo tanto, podemos decir que según las conclusiones halladas en los puntos c) y d) existe una simetría en el movimiento de subida y en el movimiento de bajada de un cuerpo.

A. Problemas para el Capítulo 1

PROBLEMA 1

Dibujar un segmento de recta de unos 15 cm de longitud. Suponga que a lo largo de la recta se mueve un objeto A . Adoptaremos la siguiente escala $1\text{ cm} = 10\text{ m}$.

a) Elija un sistema de referencia, tal que se cumpla que la posición de A en cierto instante sea:

- a.1) 30 metros
- a.2) -50 metros
- a.3) 0 metros
- a.4) 10 metros

b) Suponga ahora que nos quedamos con el sistema de referencia que eligió en a.1).

Dibuje los vectores desplazamiento entre dos segundos consecutivos, si las posiciones de A han cambiado de acuerdo a la siguiente tabla

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6
$x(m)$	30	-50	0	10	-20	-10	30

c) Determinar el desplazamiento entre el instante $t = 0$ y $t = 6\text{ s}$ del movimiento registrado en b)

d) Determinar el espacio que recorrió A entre $t = 0$ y $t = 6\text{ s}$ en b)

e) ¿Por qué no coinciden los resultados c) y d)?

PROBLEMA 2

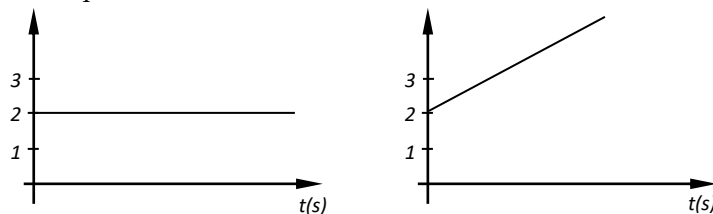
Un móvil se encuentra en el punto de abscisa 5 m en cierto instante. Determinar su abscisa si efectúa los siguientes desplazamientos:

- a) $\Delta x = 2\text{ m}$
- b) $\Delta x = -4\text{ m}$
- c) $\Delta x = -10\text{ m}$
- d) $\Delta x = 10\text{ m}$
- e) $\Delta x = 5\text{ m}$
- f) $\Delta x = 0\text{ m}$

Considere cada caso por separado, es decir partiendo de 5 m .

PROBLEMA 3

Las gráficas representan un movimiento rectilíneo uniforme



- a) Indique a qué magnitud corresponde la ordenada en cada gráfica.
- b) Determinar la velocidad y la posición inicial en este movimiento

PROBLEMA 4

La siguiente tabla, da la posición en distintos instantes de tiempo, de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo. Determinar si el movimiento es uniforme.

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x(m)$	7	12	17	22	28	33	38	44	49

PROBLEMA 5

Las tablas que se detallan a continuación sintetizan la información obtenida respecto de un conjunto de cuerpos que se mueven a lo largo de una línea recta. Determinar las gráficas correspondientes en una escala adecuada y a qué tipo de movimiento corresponde cada gráfica

a)

$t(s)$	$x(m)$
0	5
1	10
2	15
3	20
4	25
5	30
6	35

b)

$t(s)$	$x(m)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

c)

$t(s)$	$x(m)$
0	5
1	7
2	18
3	33
4	52
5	75

d)

$t(s)$	$x(m)$
0	5
1	12
2	19
3	26
4	33
5	40
6	47

PROBLEMA 6

Del problema anterior, determinar para cada caso, la velocidad media entre los intervalos de tiempo 1 s a 2 s y 3 s a 5 s .

PROBLEMA 7

Un corredor pedestre corre 200 m en $21,6\text{ s}$. Determinar su velocidad en m/s y Km/h .

PROBLEMA 8

Determinar el tiempo que tardará un automóvil que se mueve con M.R.U. en recorrer una distancia de 300 Km si su velocidad es de 30 m/s .

PROBLEMA 9

Determinar la distancia que recorrerá un automóvil que se mueve con M.R.U. a 72 Km/h en 3 h .

PROBLEMA 10

Representar gráficamente el movimiento de un móvil que en 2 h recorre 120 Km con movimiento M.R.U.

PROBLEMA 11

Dos estaciones A y B distan 100 Km entre si. De A sale un tren que tardará 2 h en llegar a B . De B sale otro, simultáneamente con el primero, hacia A con una velocidad de 70 Km/h . Determinar:

- ¿dónde estará el tren que salió de B en $1\frac{1}{2}\text{ hora}$?
- ¿a qué distancia de la estación A se cruzarán?

Resolver gráfica y analíticamente.

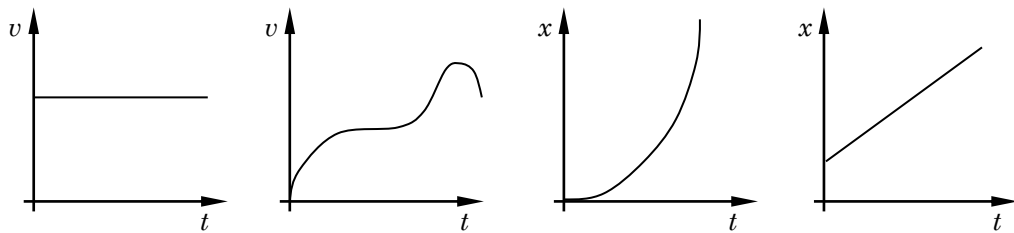
PROBLEMA 12

Un tren sale a las 8 hs con una velocidad constante de 50 Km/h . Si otro sale del mismo lugar con velocidad constante $1\frac{1}{2}\text{ h}$ después, determinar con qué velocidad constante deberá viajar para alcanzarlo a las 12 h .

Resolverlo gráfica y analíticamente.

PROBLEMA 13

Las gráficas corresponden a movimientos de cuerpos distintos.



- Indicar cuál tiene aceleración variable
 - Indicar cuál tiene aceleración constante
 - Indicar cuál no tiene aceleración
- Justificar las respuestas

PROBLEMA 14

Determinar la aceleración de un móvil cuya velocidad aumenta en 20 m/s cada 5 s .

PROBLEMA 15

Determinar la aceleración de un móvil que en 4 s alcanza una velocidad de 10 Km/h habiendo partido de reposo.

Representar gráficamente la recta de la velocidad.

PROBLEMA 16

Determinar la velocidad inicial que debería tener un móvil cuya aceleración es de 2 m/s^2 , para alcanzar una velocidad de 108 Km/h a los 5 s de su partida.

PROBLEMA 17

Un tren va con una velocidad de 18 m/s , frena y se detiene en 15 s . Determinar la aceleración y la distancia recorrida al frenar.

PROBLEMA 18

Un móvil que partió del reposo tiene un M.R.U.V. Al cabo del primer segundo tiene una velocidad de 5 m/s . Determinar:

- su velocidad a los 10 s de la partida
- la distancia recorrida en ese tiempo
- la distancia recorrida entre 9 s y 10 s

PROBLEMA 19

Un móvil que partió del reposo tiene M.R.U.V. con una aceleración de 3 m/s^2 . Determinar

- su velocidad a los 5 s de la partida
- la velocidad al 8^{vo} segundo
- la distancia recorrida en los primeros 6 s

PROBLEMA 20

Un móvil marcha a 72 Km/h . Entra en una pendiente y adquiere una aceleración de $0,5 \text{ m/s}^2$ y la recorre durante 6 s seguidos hasta llegar a terreno llano. Determinar el largo de la pendiente.

PROBLEMA 21

Un aeroplano carretea 800 m acelerando uniformemente. Realiza ese camino en 20 s . Determinar la aceleración y la velocidad con que despegó si partió del reposo.

PROBLEMA 22

Un tren marcha a 80 Km/h . Aplica los frenos y logra una aceleración negativa de -2 m/s^2 (M.R.U. retardado). Determinar la velocidad que conservó luego de 8 s y que distancia recorrió en ese tiempo.

PROBLEMA 23

Dos móviles parten simultáneamente el uno hacia el otro desde los extremos de un segmento de 5 m de longitud. Se mueven con M.R.U.V. de aceleraciones $a_1 = 0,2\text{ m/s}^2$ y $a_2 = 0,3\text{ m/s}^2$. Determinar donde y cuando se encuentran.

PROBLEMA 24

Dos móviles parten simultáneamente del origen de coordenadas, ambos en el mismo sentido y con M.R.U.V. A los 5 s de la partida, la distancia entre ambos es de 50 m . Determinar la aceleración de uno de los móviles, sabiendo que la del otro es de 3 m/s^2 .

PROBLEMA 25

Una bomba se deja caer desde un avión y tarde 10 s en dar en el blanco. Determinar a que altura volaba el avión.

PROBLEMA 26

Desde una torre de 150 m de altura, se deja caer una piedra de 10 Kg . Determinar:

- a) el tiempo que tardará en llegar al suelo.
- b) el tiempo que tardaría si fuera de 20 Kg .

PROBLEMA 27

Determinar cuantos segundos después de iniciada su caída la velocidad de un cuerpo es de 100 Km/h .

PROBLEMA 28

Determinar con que velocidad inicial se debe lanzar una piedra hacia arriba, para que alcance una altura máxima de $4,9\text{ m}$.

PROBLEMA 29

Determinar con que velocidad llegará al suelo un cuerpo que se deja caer desde una altura de 5 m y en qué tiempo lo hace.

PROBLEMA 30

Un cuerpo es lanzado hacia arriba con una velocidad de 98 m/s . Determinar:

- a) la altura máxima que alcanzará
- b) la altura y la velocidad al cabo de 9 s .

PROBLEMA 31

Determinar el tiempo que tarda un móvil en caída libre para alcanzar una velocidad de 49 m/s .

PROBLEMA 32

Un móvil al pasar en caída libre por un punto A tiene una velocidad de 10 m/s y al pasar por otro B situado más abajo, su velocidad es de $39,4\text{ m/s}$. Determinar:

- a) el tiempo que tardó en hacer el camino AB
- b) la altura AB .

PROBLEMA 33

Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de $39,2\text{ m/s}$. Determinar:

- a) la altura máxima alcanzada
- b) el tiempo empleado para lograrla
- c) la velocidad con que llega al suelo
- d) el tiempo que emplea para caer (desde la altura máxima)

PROBLEMA 34

Un observador parado a 40 m de altura ve pasar un cuerpo hacia arriba y 5 s después lo ve pasar hacia abajo. Determinar:

- a) la velocidad inicial del cuerpo
- b) la máxima altura alcanzada.

PROBLEMA 35

Los puntos A y B , están sobre la misma vertical, pero A está 512 m más arriba. Desde A se deja caer una bola y $4,3\text{ s}$ más tarde se deja caer otra desde B y ambas llegan al suelo simultáneamente. Determinar:

- a) a qué altura está B
- b) el tiempo que dura la caída de A

PROBLEMA 36

Dos cuerpos A y B , están sobre la misma vertical, pero separados una distancia de 100 m . Son arrojados uno contra el otro con una velocidad de 30 m/s y 20 m/s respectivamente. Determinar:

- a) cuando se encuentran
- b) donde se encuentran

Estática

- 2-1. Introducción
- 2-2. Magnitudes escalares y magnitudes vectoriales
 - 2-3. Vectores
 - 2-4. Versor
 - 2-5. Suma de vectores
 - 2-6. Resta de vectores
 - 2-7. Producto de un vector por un escalar
 - 2-8. Concepto de fuerza
 - 2-9. Sistema de fuerzas coplanares
- 2-10. Condición de equilibrio de un sistema de fuerzas que actúan sobre un punto
 - 2-11. Momento de una fuerza respecto de un punto
 - 2-12. Teorema de los momentos

B. Problemas

Estática

2.1. Introducción

Anteriormente, en el capítulo 1 se expresó que las fuerzas son las causantes del movimiento.

Podríamos decir, que *las fuerzas son interacciones* entre cuerpos y son las causantes que hacen que los cuerpos dejen de estar en *reposo*. *La estática determina las condiciones que debe cumplir un sistema de fuerzas que actúa sobre un punto material o un cuerpo rígido para que se encuentre en equilibrio.*

Hay que destacar que un cuerpo está en *equilibrio* respecto de un sistema de referencia cuando:

- no cambia su posición respecto de un sistema de referencia
- cuando se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) respecto de un sistema de referencia

Podemos afirmar que el *reposo* o el *movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)* son estados semejantes y no se pueden diferenciar entre dos estados: el reposo y el M.R.U.

Ejemplo 2-1: Imaginemos una situación hipotética. Estamos dentro de una nave espacial en el universo infinito, supongamos que la nave no tiene los motores encendidos. Luego, si un astronauta se despierta ¿podrá determinar en ese momento sin mirar por las ventanillas, si la nave se mueve con M.R.U. o está en reposo? Evidentemente es esas condiciones, será muy difícil distinguir entre esos dos estados.

2.2. Magnitudes escalares y magnitudes vectoriales

En nuestro mundo físico hay *magnitudes escalares* y *magnitudes vectoriales*.

Las *magnitudes escalares* como por ejemplo la temperatura, la masa, el tiempo, son aquellas que pueden representarse mediante un número, es decir 12°C, 18 Kg y 36 min, y quedan perfectamente definidas a través de una magnitud.

En cambio, hay otras magnitudes, las *magnitudes vectoriales* en las cuales su magnitud está asociada a una orientación. Por lo tanto, para expresar correctamente una magnitud vectorial es necesario la utilización de 3 características: *dirección, sentido y módulo (intensidad)*.

Ejemplos de este tipo de magnitudes son la fuerza, la velocidad, la aceleración y para poder representarlas lo hacemos mediante la utilización de un *vector*, tal como se muestra en la figura 2-1.

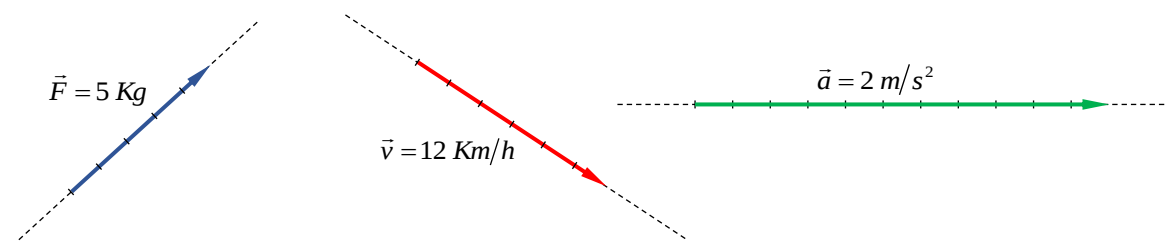


Figura 2-1

2.3. Vectores

Es interesante estudiar, las propiedades y operaciones elementales de los vectores y de esta forma, aprenderemos las propiedades y operaciones de todas las magnitudes vectoriales, como, por ejemplo: la velocidad, la fuerza.

Un vector es un segmento orientado. El primero de los puntos se denomina *origen* y el segundo *extremo del vector*. La recta que contiene el vector determina la *dirección* del mismo y la orientación sobre esa recta determina el *sentido* del mismo. La longitud del vector es proporcional a su *intensidad* o *módulo* es la longitud del segmento orientado $\overline{OE}$.

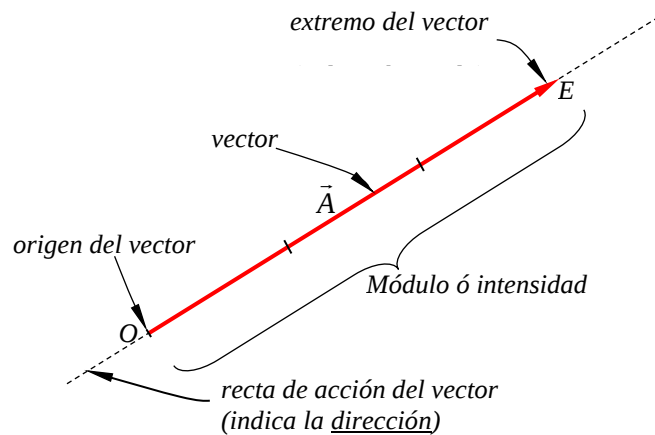


Figura 2-2

Una magnitud vectorial se puede representar de alguna de las siguientes maneras

vector A , $\vec{A}$ (con flecha), $\overline{A}$ (con segmento), $\mathbf{A}$ (negrita)

Un vector queda perfectamente identificado a través de las siguientes características

$\left. \begin{array}{l} \text{dirección} \\ \text{sentido} \\ \text{módulo} \end{array} \right\} \text{vector } A : \vec{A}$

El módulo del vector $\vec{A}$ se indica como

$|\vec{A}|$ $\overline{A}$ $\mathbf{A}$ (sin flecha / segmento o negrita)

Se dice que dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo la misma dirección y el mismo sentido.

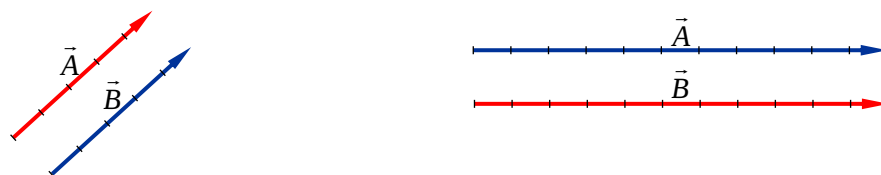


Figura 2-3

En el plano, si $\vec{A} = \vec{B}$, con este criterio de igualdad, podemos decir que todos los vectores pueden ser trasladados de manera que tengan un mismo origen.

2.4. Versor

Se denomina versor al *vector cuyo módulo es la unidad*. Hay dos versores que se utilizan comúnmente y son el versor $\hat{i}$ que está en la dirección y sentido del eje $+x$; y el versor $\hat{j}$ que está en la dirección y sentido del eje $+y$.

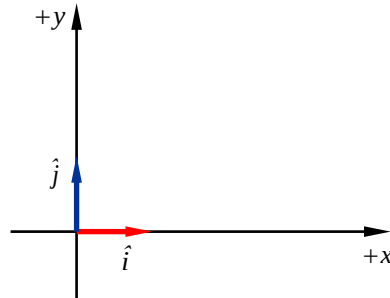


Figura 2-4

De acuerdo con la definición se tiene que

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

Veremos en puntos posteriores que un vector puede representarse según los versores $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

2.5. Suma de vectores

Para sumar vectores hay métodos gráficos y métodos analíticos (a través de fórmulas)

2.5.1. Métodos gráficos

Método 1: Regla del paralelogramo

El procedimiento es el siguiente. Supongamos tener dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de distinto origen y queremos hallar la suma de ambos.

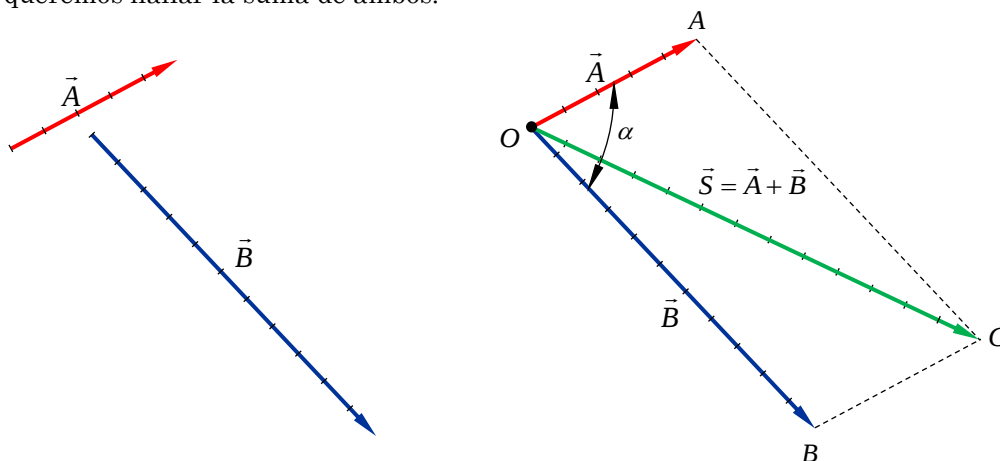


Figura 2-5

Primeramente, se llevan a un origen común O . Luego se trazan paralelas a ambos vectores por sus extremos, AC y BC , formándose por lo tanto el paralelogramo $OACB$. Uniendo el origen O con el punto C se obtiene el vector suma $\vec{S}$, es decir $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$.

Debemos observar una característica muy importante de la suma de vectores: si el ángulo α comprendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es distinto a $\alpha \neq 0^\circ$ y $\alpha \neq 180^\circ$, entonces la suma del módulo $|\vec{A}| + \text{módulo } |\vec{B}| \neq \text{módulo } |\vec{S}|$.

Ejemplo 2-2: Supongamos que los vectores de la figura 2-4 tienen los siguientes valores, módulo $|\vec{A}| = 2,5 \text{ cm}$, módulo $|\vec{B}| = 5,5 \text{ cm}$ y esto da como resultado módulo $|\vec{S}| = 7 \text{ cm}$, sin embargo

$$\begin{array}{ccccccc} \text{módulo } |\vec{A}| & + & \text{módulo } |\vec{B}| & \neq & \text{módulo } |\vec{S}| \\ 2,5 \text{ cm} & + & 5,5 \text{ cm} & \neq & 7 \text{ cm} \end{array}$$

el módulo de la suma de los vectores dependerá del ángulo α comprendido entre los vectores.

Los vectores dados pueden tener el mismo origen, en este caso el método suprime el paso de llevar los vectores a un origen común.

Ejemplo 2-3: Supongamos tener las fuerzas $|\vec{F}_1| = 8 \text{ Kg}$ y $|\vec{F}_2| = 5 \text{ Kg}$ (recordar que la fuerza es una magnitud vectorial) y sea el ángulo entre los dos vectores $\alpha = 35^\circ$. Determinar aplicando la regla del paralelogramo la resultante o suma $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Datos:

$$|\vec{F}_1| = 8 \text{ Kg}$$

$$|\vec{F}_2| = 5 \text{ Kg}$$

$$\alpha = 35^\circ$$

Incógnitas:

$$|\vec{F}_R| = ?$$

$$\beta = ?$$

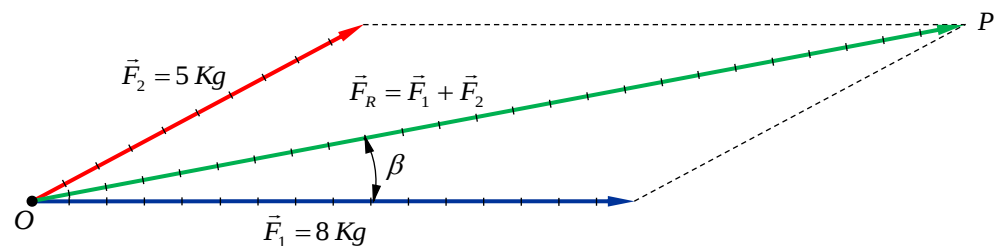


Figura 2-6

Se construyen en escala a partir de un punto O (arbitrario) las fuerzas. Colocamos primeramente $\vec{F}_1 = 8 \text{ Kg}$ (horizontalmente para simplificar el análisis) y a partir de $\vec{F}_1$ mido el ángulo $\alpha = 35^\circ$, luego con origen en O trazo la fuerza $\vec{F}_2 = 5 \text{ Kg}$. Aplicamos la regla del paralelogramo y luego trazamos la diagonal OP que representa el vector resultante o suma $\vec{F}_R$. Medimos la longitud de $\vec{F}_R$, lo cual nos da (en la misma escala con que se dibujaron las fuerzas)

$$\overline{OP} = |\vec{F}_R| = 12,5 \text{ cm} = 12,5 \text{ Kg}$$

Luego, con un semicírculo podemos determinar el ángulo $\beta = 13^\circ$

Finalmente, la respuesta es

$$|\vec{F}_R| = 12,5 \text{ Kg} \text{ y } \beta = 13^\circ$$

La respuesta para que sea correcta debe contener además del módulo de la suma $|\vec{F}_R|$, el ángulo β que forma el vector suma $\vec{F}_R$ con uno de los vectores dados, para así saber cuál es la dirección del vector $\vec{F}_R$.

Método 2: Método de la poligonal

Este método se aplica por lo general cuando tenemos suma de más de dos vectores, pero también puede aplicarse en el caso de suma de 2 vectores.

El procedimiento es el siguiente. Supongamos tener dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de distinto origen y queremos hallar la suma de ambos.

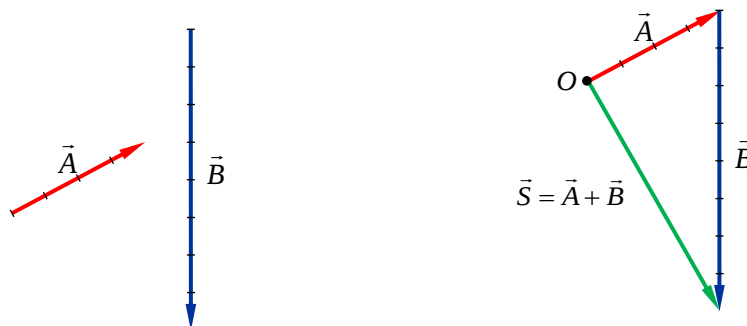


Figura 2-7

Primeramente, se traslada el vector $\vec{A}$ (conservando la magnitud, dirección y sentido) a partir de un punto O , que se toma como origen, luego a continuación del vector $\vec{A}$ se traslada el vector $\vec{B}$ (manteniendo su magnitud, dirección y sentido). Se une el origen del vector $\vec{A}$, es decir el punto O , con el extremo del vector $\vec{B}$, obteniéndose de esta manera el vector suma $\vec{S}$, es decir $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$.

Para un caso más general el procedimiento es el siguiente. Supongamos tener cuatro vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ y $\vec{D}$ de distinto origen y queremos hallar el vector suma.

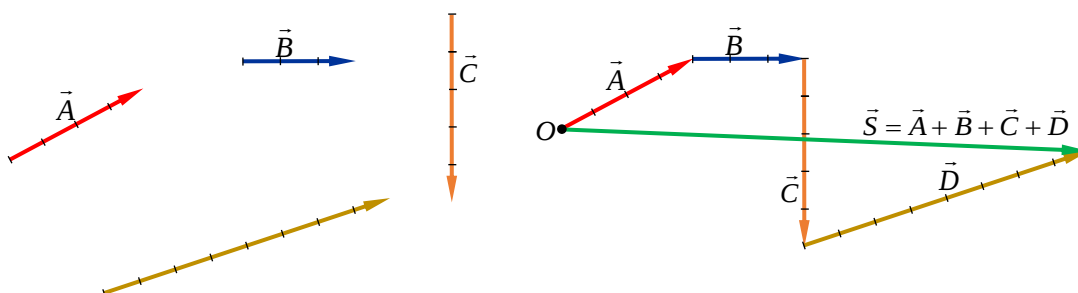


Figura 2-8

A partir de un origen arbitrario O se traslada el vector $\vec{A}$, luego a continuación del vector $\vec{A}$ se traslada el vector $\vec{B}$, y a continuación del vector $\vec{B}$, utilizando siempre el mismo procedimiento, se traslada el vector $\vec{C}$ y así sucesivamente hasta llevar el último vector. Se une el origen del primer vector con el extremo del último vector obteniéndose así el vector suma $\vec{S}$, es decir $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$.

Ejemplo 2-4: Supongamos tener los siguientes vectores $|\vec{a}| = 7 \text{ cm}$, $|\vec{b}| = 5 \text{ cm}$, $|\vec{c}| = 8 \text{ cm}$ y $|\vec{d}| = 4 \text{ cm}$ y los correspondientes ángulos entre vectores $\alpha_{ab} = 40^\circ$, $\alpha_{bc} = 100^\circ$ y $\alpha_{cd} = 70^\circ$. Determinar aplicando el método de la polygonal el vector resultante o suma.

Datos:

Incógnitas:

$$|\vec{a}| = 7 \text{ cm} \quad \alpha_{ab} = 40^\circ \quad |\vec{S}| = ?$$

$$|\vec{b}| = 5 \text{ cm} \quad \alpha_{bc} = 100^\circ \quad \beta = ?$$

$$|\vec{c}| = 8 \text{ cm}$$

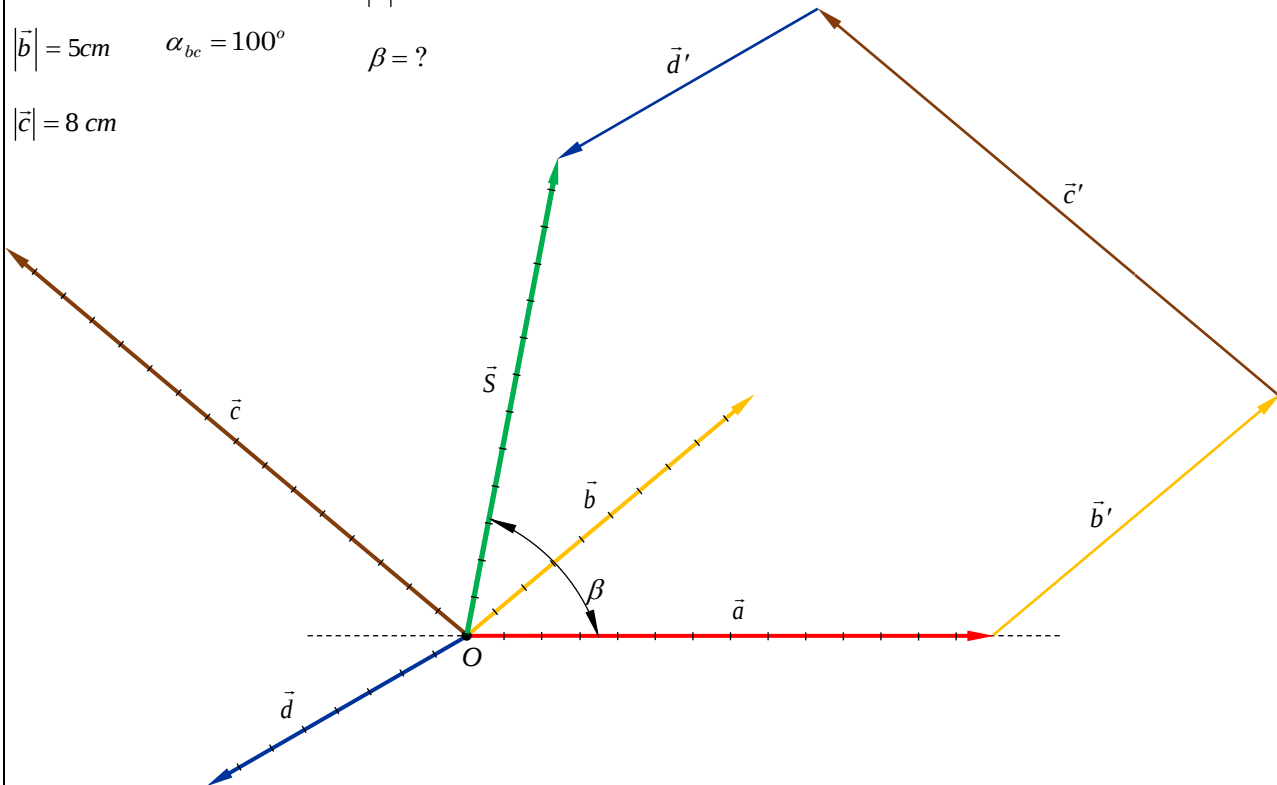


Figura 2-9

Aplicando el procedimiento explicado en el punto 2.4.2, obtenemos el vector suma $\vec{S}$, siendo

$$|\vec{S}| = 6,5 \text{ cm} \quad \text{y} \quad \beta = 79^\circ$$

2.5.2. Método analítico

Método 1: Teorema del coseno y seno

Para obtener el módulo de la suma de dos vectores se aplica la fórmula correspondiente al *Teorema del coseno*

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \quad (2-1)$$

en donde:

α : es el ángulo comprendido entre el vector $\vec{a}$ y el vector $\vec{b}$

a : es la magnitud del vector $\vec{a}$

b : es la magnitud del vector $\vec{b}$

c : es la magnitud del vector resultante $\vec{c}$

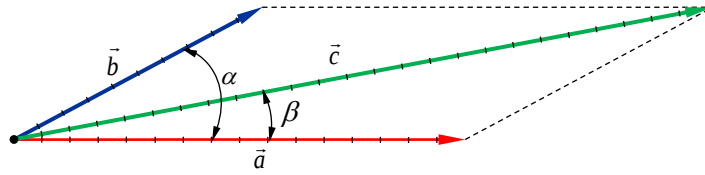


Figura 2-10

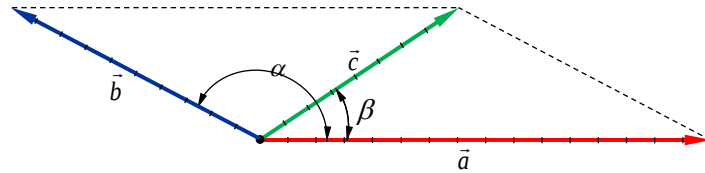


Figura 2-11

Se observa en la figura 2-10 y 2-11, que si el ángulo $\alpha > 90^\circ$ el módulo del vector suma $\vec{c}$ disminuye, esto también se puede analizar a través de la ecuación 2-1, en la cual interviene el $\cos \alpha$ que para ángulos $\alpha > 90^\circ$ es negativo, por lo que la suma dentro de la raíz cuadrada es cada vez más pequeña.

Para obtener el ángulo β que forma el vector suma $\vec{c}$ con el vector $\vec{a}$ se aplica la fórmula del *Teorema del seno*, la cual enuncia: en un triángulo oblicuángulo existe la siguiente relación entre los lados y los ángulos opuestos

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \delta} \quad (2-2)$$

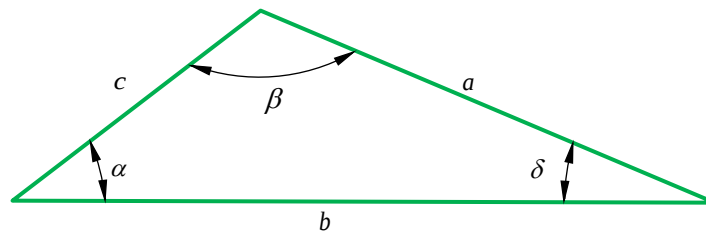


Figura 2-12

Ejemplo 2-5: Dada una fuerza $|\vec{F}_1| = 18 \text{ Kg}$ y una fuerza $|\vec{F}_2| = 24 \text{ Kg}$ y siendo el ángulo entre ambas fuerzas $\alpha = 130^\circ$. Determinar gráfica y analíticamente la resultante o suma de las fuerzas dadas: $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Datos:

$$|\vec{F}_1| = 18 \text{ Kg}$$

$$|\vec{F}_2| = 24 \text{ Kg}$$

$$\alpha = 130^\circ$$

Incógnitas:

$$|\vec{F}_R| = ?$$

$$\beta = ?$$

Resolución gráfica:

Adoptaremos la siguiente escala para la representación de las fuerzas: $1 \text{ cm} : 3 \text{ Kg}$

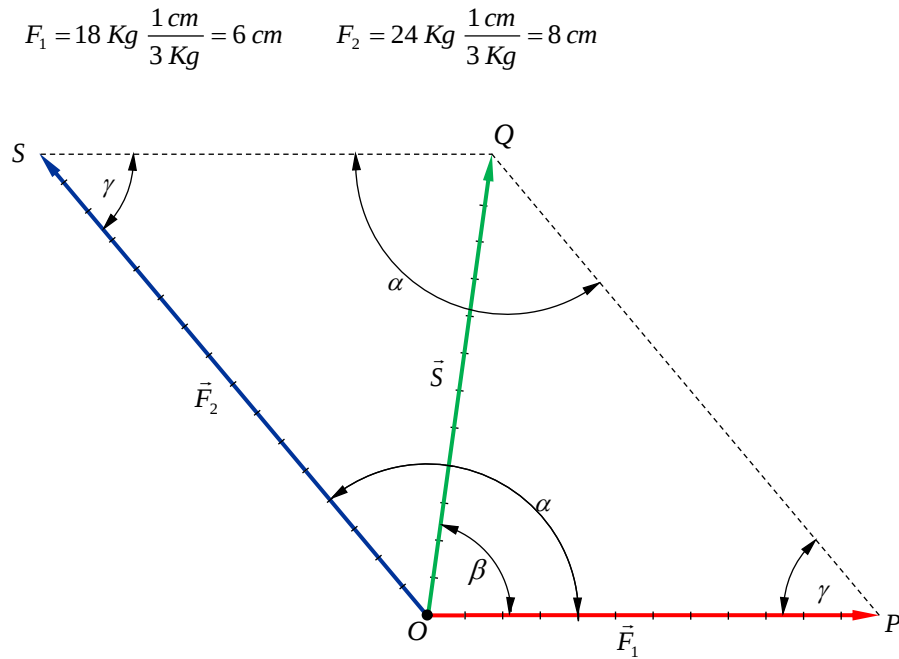


Figura 2-13

La resolución gráfica la realizamos aplicando la regla del paralelogramo, obteniendo el vector suma $\vec{S} = 6 \text{ cm}$, convirtiendo esta magnitud según la escala adoptada se tiene

$$S = 6 \text{ cm} \frac{3 \text{ Kg}}{1 \text{ cm}} = 18 \text{ Kg}$$

Por lo tanto, el resultado del vector suma correctamente expresado es

$$|\vec{S}| = 18 \text{ Kg} \quad \text{y} \quad \beta = 82^\circ$$

Resolución analítica:

Para obtener la magnitud del vector suma, aplicamos el teorema del coseno, entonces

$$S = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha} = \sqrt{18^2 + 24^2 + 2 \cdot 18 \cdot 24 \cos 130^\circ} = 18,56 \text{ Kg}$$

Para determinar el valor del ángulo β , primeramente, determinaremos el valor del ángulo γ , para ello consideraremos el paralelogramo $OSQP$. La suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es igual a 360° , es decir

$$2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$$

$$\gamma = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = \frac{360^\circ - 2 \cdot 130}{2} = 50^\circ$$

Aplicando ahora el teorema del seno, al triángulo OPQ , se tiene

$$\frac{S}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{F_2}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{F_2}{S} \operatorname{sen} \gamma = \frac{24 \text{ Kg}}{18,56 \text{ Kg}} \operatorname{sen} 50^\circ = 0,99$$

luego

$$\beta = \arccos 0,99 = 82,12^\circ$$

Por lo tanto, el resultado del vector suma correctamente expresado es

$$|\vec{S}| = 18,56 \text{ Kg} \quad \text{y} \quad \beta = 82,12^\circ$$

Se observa que los resultados obtenidos por resolución gráfica difieren muy poco de los resultados hallados por el empleo de métodos analíticos. Con la resolución analítica se obtienen resultados más exactos que los resultados obtenidos por la utilización del método gráfico.

Método 2: Componentes de un vector

Otro método analítico empleado para la resolución de problemas vectoriales es el *método de componentes de un vector*. Mediante este método se pueden realizar las operaciones de suma y resta de vectores.

Consideremos la figura 2-14. Dada una fuerza $\vec{F}$ en el plano podemos descomponer dicha fuerza según dos componentes, F_x y F_y . Suponemos que la fuerza $\vec{F}$ forma un ángulo α con el eje $+x$.

La proyección de la fuerza $\vec{F}$ sobre el eje x , es F_x y vale

$$F_x = F \cos \alpha \quad (2-3)$$

y la proyección de la fuerza $\vec{F}$ sobre el eje y , es F_y y vale

$$F_y = F \operatorname{sen} \alpha \quad (2-4)$$

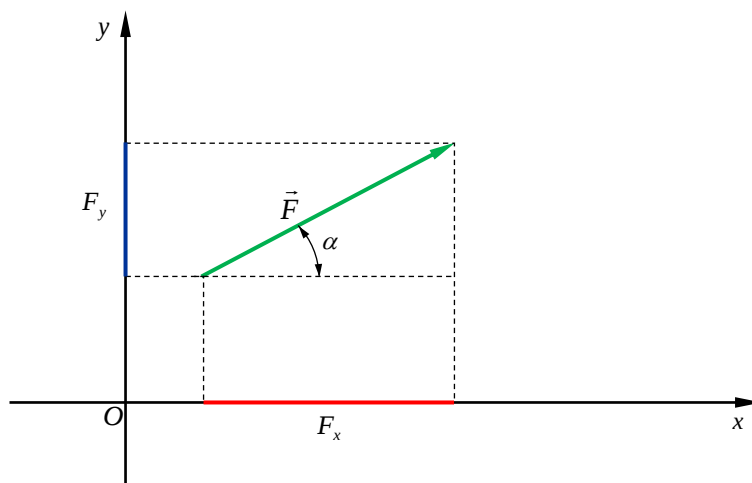


Figura 2-14

Ejemplo 2-6: Dada una fuerza $|\vec{F}| = 12 \text{ Kg}$ que forma un ángulo α con el eje x , determinar sus componentes cuando: a) $\alpha = 70^\circ$, b) $\alpha = 150^\circ$, c) $\alpha = 225^\circ$ y d) $\alpha = 308^\circ$.

Datos:

$$|\vec{F}| = 12 \text{ Kg}$$

$$\alpha = 70^\circ, \alpha = 150^\circ, \alpha = 225^\circ, \alpha = 308^\circ.$$

Incógnitas:

$$F_x = ?$$

$$F_y = ?$$

Para determinar las componentes aplicamos las ecuaciones 2-3 y 2-4, entonces

a)

$$F_x = F \cos \alpha = 12 \text{ Kg} \cos 70^\circ = 4,10 \text{ Kg}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 12 \text{ Kg} \sin 70^\circ = 11,28 \text{ Kg}$$

b)

$$F_x = F \cos \alpha = 12 \text{ Kg} \cos 150^\circ = -10,39 \text{ Kg}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 12 \text{ Kg} \sin 150^\circ = 6,0 \text{ Kg}$$

c)

$$F_x = F \cos \alpha = 12 \text{ Kg} \cos 225^\circ = -8,48 \text{ Kg}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 12 \text{ Kg} \sin 225^\circ = -8,48 \text{ Kg}$$

a)

$$F_x = F \cos \alpha = 12 \text{ Kg} \cos 308^\circ = 7,38 \text{ Kg}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 12 \text{ Kg} \sin 308^\circ = -9,45 \text{ Kg}$$

Evidentemente, se cumple que

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \quad (2-5)$$

esto significa que puede reemplazarse una fuerza $\vec{F}$ por sus componentes $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$.

En general un vector puede expresarse según sus componentes como

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad (2-6)$$

donde F_x es la componente de la fuerza $\vec{F}$ en la dirección del eje x ($\hat{i}$), y F_y es la componente de la fuerza $\vec{F}$ en la dirección del eje y ($\hat{j}$),

Ejemplo 2-7: Expresar el vector del ejemplo 2-6 parte a) según sus componentes de acuerdo a la ecuación 2-6.

Del ejemplo 2-6 a) obtenemos el valor de las componentes que son

$$F_x = 4,10 \text{ Kg} \quad \text{y} \quad F_y = 11,28 \text{ Kg}$$

por lo tanto, de acuerdo con la expresión 2-6, se tiene

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} = (4,10 \hat{i} + 11,28 \hat{j}) \text{ Kg}$$

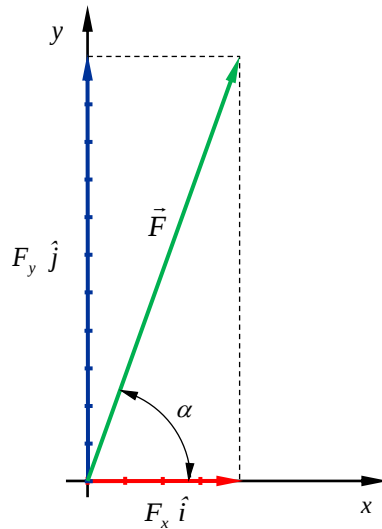


Figura 2-15

Vimos que un vector $\vec{F}$ puede reemplazarse por sus componentes F_x y F_y en general puede expresarse a través de la ecuación 2-6.

De manera inversa, si tenemos las dos componentes, es decir F_x y F_y de un vector, podremos obtener el vector $\vec{F}$, es decir su módulo $|\vec{F}|$ y su dirección y sentido que forma respecto del eje x .

Como puede observarse en la figura 2-16, la fuerza $\vec{F}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC donde $AB = F_x$ y $BC = F_y$ entonces aplicando el Teorema de Pitágoras podemos obtener

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2-7)$$

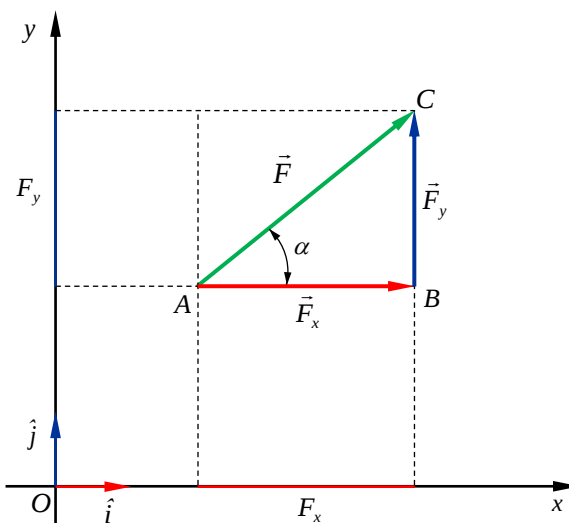


Figura 2-16

además

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{F_y}{F_x}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{F_y}{F_x} \quad (2-8)$$

Ejemplo 2-8: Sea la fuerza $\vec{F} = -7\hat{i} + 3\hat{j}$. Determinar el módulo del vector y el ángulo que forma con el eje x . Representar gráficamente.

Datos:

$$\vec{F} = -7\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$F_x = -7 \quad F_y = 3$$

Incógnitas:

$$|\vec{F}| = ?$$

$$\alpha = ?$$

El módulo lo determinamos a través de la ecuación 2-7

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-7)^2 + 3^2} = 7,6$$

y el ángulo mediante la ecuación 2-8

En realidad, por tratarse de un vector, y este se encuentra en el segundo cuadrante (Figura 2-17), el ángulo se deberá indicar con respecto al eje x positivo, por lo tanto, el ángulo α valdrá

$$\alpha = 180^\circ - 23,20^\circ = 156,8^\circ$$

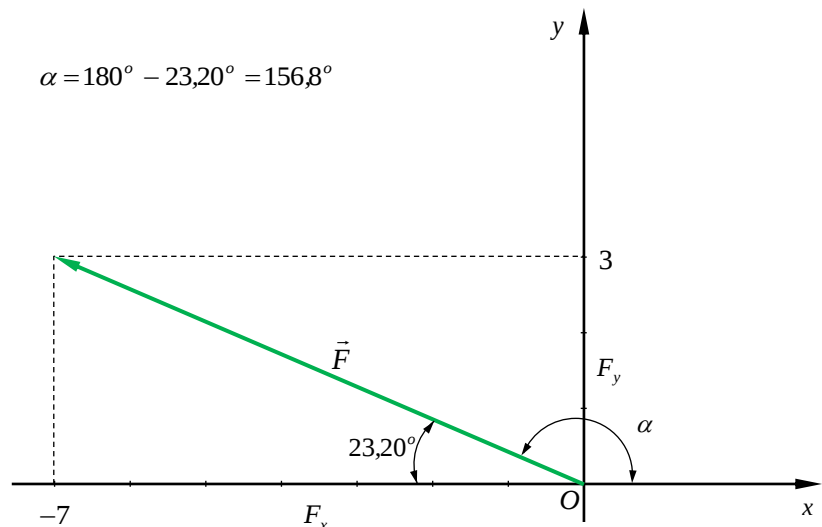


Figura 2-17

2.5.3. Suma de vectores por componentes

Un vector puede reemplazarse por sus componentes a través de la ecuación 2-6. Supongamos tener dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, en donde

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$$

Como las componentes $\hat{i}$ de cada vector tienen la misma dirección, eje x ; y las

componentes $\hat{j}$ también tienen la misma dirección, *eje y*, sus módulos pueden sumarse, entonces

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}$$

en donde

$(a_x + b_x) = S_x$ = componente de la suma en la dirección del *eje x*

$(a_y + b_y) = S_y$ = componente de la suma en la dirección del *eje y*

por lo tanto, podemos escribir que

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} \quad (2-9)$$

la ecuación 2-9 es válida para cualquier número de sumandos, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, ..., $\vec{n}$, es decir

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{n} = \underbrace{(a_x + b_x + c_x + \dots + n_x)}_{S_x} \hat{i} + \underbrace{(a_y + b_y + c_y + \dots + n_y)}_{S_y} \hat{j} \quad (2-10)$$

Ejemplo 2-9: Sean los siguientes vectores $\vec{a} : |\vec{a}| = 7 \quad \phi = 30^\circ$, $\vec{b} : |\vec{b}| = 5 \quad \beta = 110^\circ$, $\vec{c} : |\vec{c}| = 8 \quad \gamma = 220^\circ$ y $\vec{d} : |\vec{d}| = 6 \quad \delta = 300^\circ$. Determinar el módulo del vector suma $\vec{S}$ y el ángulo que forma con el *eje x*.

Datos:

$$\vec{a} : |\vec{a}| = 7 \quad \phi = 30^\circ$$

$$\vec{b} : |\vec{b}| = 5 \quad \beta = 110^\circ$$

$$\vec{c} : |\vec{c}| = 8 \quad \gamma = 220^\circ$$

$$\vec{d} : |\vec{d}| = 6 \quad \delta = 300^\circ$$

Incógnitas:

$$|\vec{S}| = ?$$

$$\alpha = ?$$

Primera mente, determinaremos las componentes de cada vector empleando las ecuaciones 2-3 y 2-4, por lo tanto

$$a_x = 7 \cos 30^\circ = 6,06$$

$$b_x = 5 \cos 110^\circ = -1,71$$

$$c_x = 8 \cos 220^\circ = -6,13$$

$$d_x = 6 \cos 300^\circ = 3,0$$

$$S_x = a_x + b_x + c_x + d_x$$

$$S_x = 6,06 - 1,71 - 6,13 + 3$$

$$S_x = 1,22$$

$$\vec{S} = 1,22 \hat{i} - 2,13 \hat{j}$$

$$a_y = 7 \sen 30^\circ = 3,5$$

$$b_y = 5 \sen 110^\circ = 4,7$$

$$c_y = 8 \sen 220^\circ = -5,14$$

$$d_y = 6 \sen 300^\circ = -5,19$$

$$S_y = a_y + b_y + c_y + d_y$$

$$S_y = 3,5 + 4,7 - 5,14 - 5,18$$

$$S_y = -2,13$$

Para determinar el módulo aplicamos la ecuación 2-7

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{1,22^2 + (-2,13)^2} = 2,45$$

y el ángulo mediante la ecuación 2-8

$$\alpha = \arctg \frac{S_y}{S_x} = \arctg \frac{-2,13}{1,22} = -60,2^\circ$$

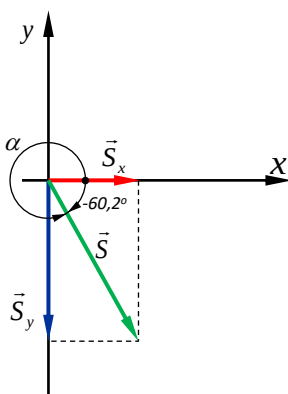


Figura 2-18

El signo de las componentes nos indica que el vector se halla en el cuarto cuadrante, por lo que la respuesta correcta del ángulo es referida al eje x positivo, entonces

2.6. Resta de vectores

Al igual que cuando vimos suma de vectores, para restar vectores se utilizan los mismos métodos gráficos y analíticos.

2.6.1. Métodos gráficos

Método 1: Regla del paralelogramo

Se realiza empleando el mismo procedimiento utilizado que en la suma de vectores, punto 2-5-1, con la diferencia que al colocar el segundo vector (el que está restando), se lo dibuja conservando la dirección, pero en sentido contrario, este procedimiento se observa en la figura 2-19, para realizar la resta vectorial $\vec{A} - \vec{B}$.

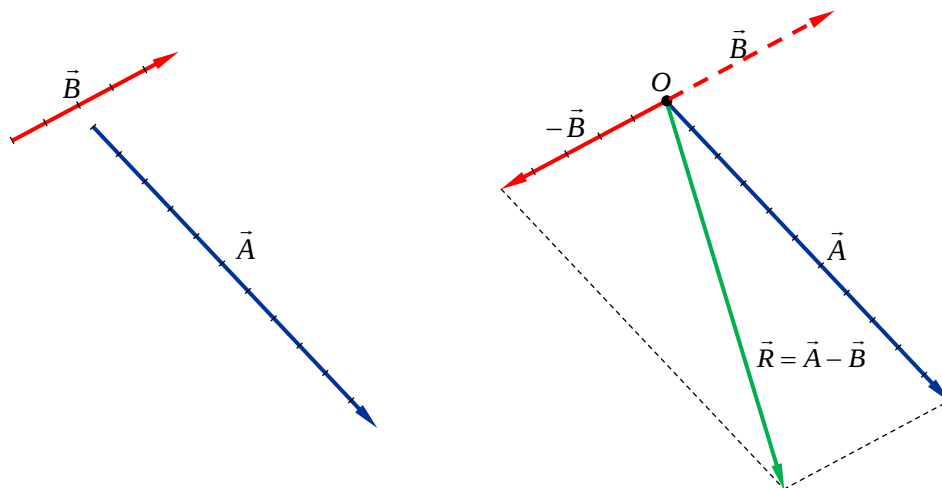


Figura 2-19

Otra forma de realizar la resta entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es llevar ambos a un mismo origen y unir el extremo del segundo vector en este caso el vector $\vec{B}$ con el extremo del vector $\vec{A}$.

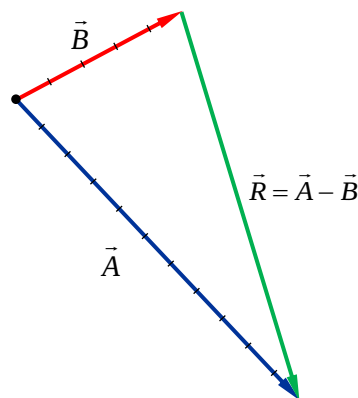


Figura 2-20

2.6.2. Métodos analíticos

Método 1: Teorema del coseno y seno

Para la resolución analítica se utilizan las expresiones similares a las ecuaciones 2-1 y 2-2, únicamente que en la ecuación 2-1 cambia el signo

$$|\vec{R}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \quad (2-11)$$

en donde:

α : es el ángulo comprendido entre el vector $\vec{a}$ y el vector $\vec{b}$

a : es la magnitud del vector $\vec{a}$

b : es la magnitud del vector $\vec{b}$

Ejemplo 2-10: Dado los vectores $|\vec{a}|=8$ y $|\vec{b}|=5$ y sea el ángulo entre ellos $\alpha=140^\circ$, determinar gráfica y analíticamente la resta $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b}$.

Datos:

$$|\vec{a}|=8$$

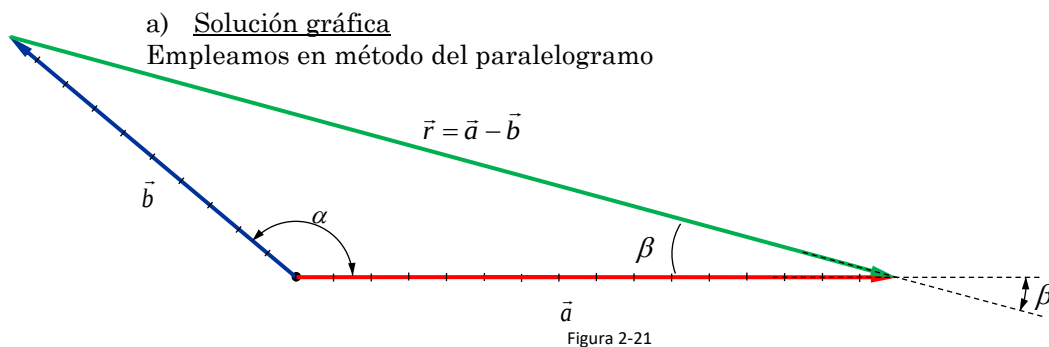
$$|\vec{b}|=5$$

$$\alpha=140^\circ$$

Incógnitas:

$$|\vec{r}|=?$$

$$\beta=?$$



Utilizando una regla y un semicírculo podemos determinar la magnitud del vector $\vec{r}$ y el ángulo β , resultando aproximadamente

$$|\vec{r}|=12,2 \text{ y } \beta=-15^\circ$$

b) Solución analítica

Aplicamos el teorema del coseno para determinar el módulo del vector resta

$$|\vec{r}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos 140^\circ} = 12,25$$

el ángulo α lo determinamos aplicando el teorema del seno

$$\frac{\sin \beta}{|\vec{b}|} = \frac{\sin \alpha}{|\vec{r}|}$$

$$\beta = \arcsen \left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{r}|} \sin \alpha \right) = \arcsen \left(\frac{5}{12,25} \sin 140^\circ \right) = 15,2^\circ$$

pero de acuerdo con la figura 2-21, se observa que la verdadera orientación del vector es

$$\beta = -15,2^\circ$$

Método 2: Método por componentes

Otra forma de resolver analíticamente la resta de vectores es empleando el método analítico de las componentes

Supongamos tener dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, en donde

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$$

en donde

$$a_x = a \cos \alpha \quad a_y = a \sin \alpha$$

$$b_x = b \cos \beta \quad b_y = b \sin \beta$$

Podemos escribir la resta entre dos vectores de manera similar a como procedimos en la suma, como

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} = \underbrace{(a_x - b_x)}_{r_x} \hat{i} + \underbrace{(a_y - b_y)}_{r_y} \hat{j} \quad (2-12)$$

en donde

$$r_x = a_x - b_x$$

$$r_y = a_y - b_y$$

y en ángulo α queda definido por

$$\alpha = \arctg \frac{r_y}{r_x}$$

Ejemplo 2-11: Resolver el ejemplo 2-10 por el método de las componentes

Datos:

$$|\vec{a}| = 8$$

$$|\vec{b}| = 5$$

$$\alpha = 140^\circ$$

De acuerdo con los datos y a la figura 2-21, podemos escribir las componentes para cada vector como

$$a_x = 8 \cos 0^\circ = 8 \quad \text{y} \quad a_y = 8 \sin 0^\circ = 0$$

$$b_x = 5 \cos 140^\circ = -3,83 \quad \text{y} \quad b_y = 5 \sin 140^\circ = 3,21$$

Incógnitas:

$$|\vec{r}| = ?$$

$$\beta = ?$$

entonces podemos escribir los vectores como

$$\vec{a} = 8 \hat{i} + 0 \hat{j}$$

$$\vec{b} = -3,83 \hat{i} + 3,23 \hat{j}$$

realizando la resta entre ambos vectores

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} = [8 - (-3,83)] \hat{i} + (0 - 3,21) \hat{j} = 11,83 \hat{i} - 3,23 \hat{j}$$

cuyo módulo es

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{11,83^2 + (-3,23)^2} = 12,26$$

y el ángulo

$$\beta = \arctg \frac{r_y}{r_x} = \arctg \frac{-3,23}{11,83} = -15,27^\circ$$

el cual, de acuerdo con el signo de las componentes, se observa que el vector se halla en el cuarto cuadrante, por lo tanto, la expresión correcta para el ángulo es

$$\beta = 344,7^\circ \text{ o } \beta = -15,27^\circ$$

2.7. Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector $\vec{a}$ por un escalar n , da como resultado otro vector $\vec{b}$ que tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{a}$, y cuyo módulo es n veces el módulo del vector $\vec{a}$, es decir

$$\vec{b} = n \cdot \vec{a} \quad (2-12)$$

o en función de sus componentes

$$\vec{b} = n \cdot \vec{a} = n a_x \hat{i} + n a_y \hat{j} \quad (2-13)$$

Ejemplo 2-12: Supóngase que tenemos un vector $\vec{a}$ como el mostrado en la figura 2-22. Determinar el producto escalar cuando $n=3$.

Datos:

vector $\vec{a}$

$n=3$

Incógnita:

$\vec{b} = \vec{a} \cdot n = ?$

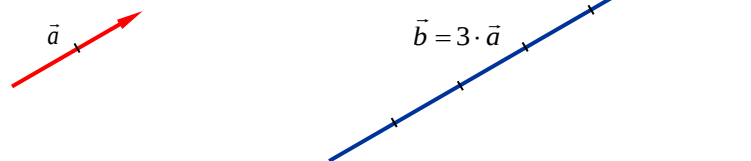


Figura 2-22

2.8. Concepto de fuerza

En general todos tenemos un concepto intuitivo de la *fuerza*, presente cuando las contracciones de nuestros músculos aplican una fuerza, esto se produce muy a menudo durante el día. Permanentemente, hacemos esfuerzos, con nuestros músculos, para aplicar fuerzas o mover objetos que nos rodean.

En la naturaleza hay diferentes tipos de fuerzas, como, por ejemplo: fuerzas gravitatorias, eléctricas, químicas, atómicas, etc.

En general podemos decir que: *fuerza es la causa del movimiento*, o también la podemos enunciar como: *fuerza es una interacción entre dos cuerpos*.

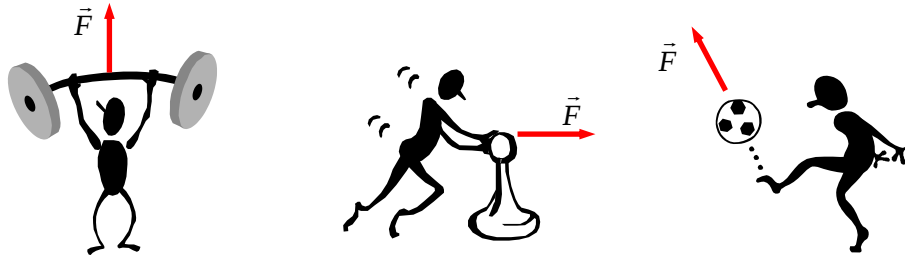


Figura 2-23

En la figura 2-23 se observan algunos ejemplos de fuerzas $\vec{F}$ aplicados a cuerpos.

Otros ejemplos de fuerza son:

Fuerza peso ($\vec{P}$): todo cuerpo en la Tierra está sometido a una fuerza llamada *peso*. La característica de esta fuerza peso es que es una fuerza que ejerce la tierra sobre todo cuerpo, y está dirigida perpendicularmente a un plano horizontal, tal como se observa en la figura 2-24.

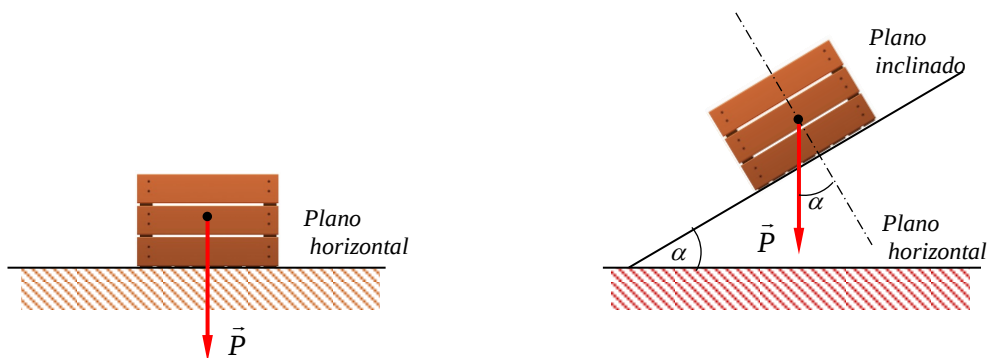


Figura 2-24

Fuerza normal ($\vec{N}$): Es una fuerza ejercida por el suelo o superficie sobre un cuerpo apoyado y es perpendicular a la dirección de la superficie de apoyo.

Todo cuerpo apoyado está sometido a la acción de dos fuerzas: el peso $\vec{P}$ y la normal $\vec{N}$.

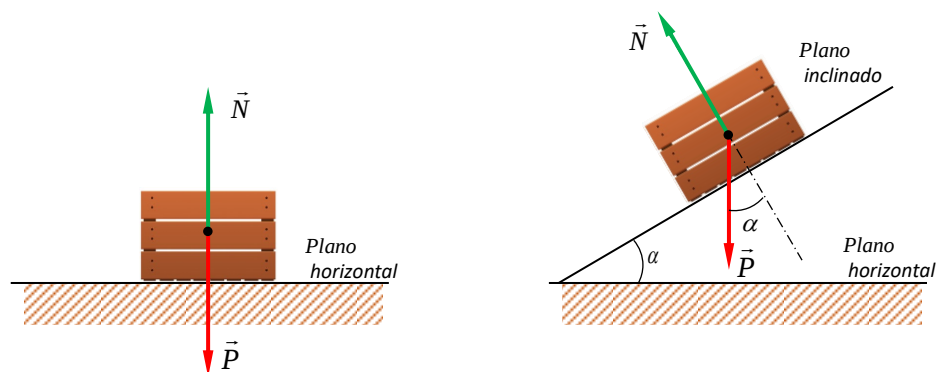


Figura 2-25

Tensión ($\vec{T}$): Todo cuerpo suspendido por una soga o cuerda está sometido a una fuerza que llamaremos *tensión* $\vec{T}$. De esta forma un cuerpo suspendido de una soga está sometido a la

acción de dos fuerzas: el peso $\vec{P}$ y la tensión $\vec{T}$.

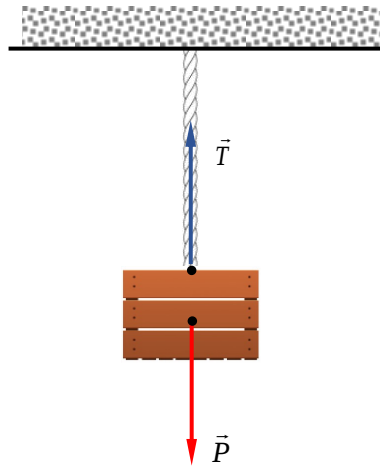


Figura 2-26

2.9. Sistema de fuerzas coplanares

Un sistema de fuerzas es un conjunto de fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Si dicho sistema pertenece a un plano, se denomina *coplanar*. Por lo general, por razones de simplicidad, en este capítulo trabajaremos solamente con sistemas de fuerzas coplanares.

Si esas fuerzas actúan sobre un cuerpo de pequeñas dimensiones, diremos que actúan sobre un punto. Las fuerzas que actúan sobre un punto se llaman *concurrentes*.

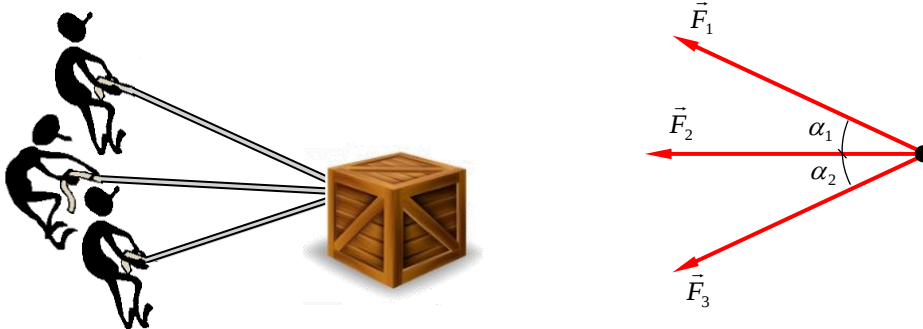


Figura 2-27

En la figura 2-27 podemos considerar un cajón tirado por tres personas que aplican tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ sobre el mismo. Podemos simplificar esta situación considerando el cajón como un punto y sobre él aplicado las tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ coplanares.

Recordemos que, por ser las fuerzas, magnitudes vectoriales, tienen las propiedades de los vectores a los efectos de la suma y la resta.

En general podemos representar un sistema de fuerzas coplanares, tal como se muestra en la figura 2-28. En la misma se ha representado un cuerpo puntual en el cual actúan cuatro fuerzas coplanares $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$.

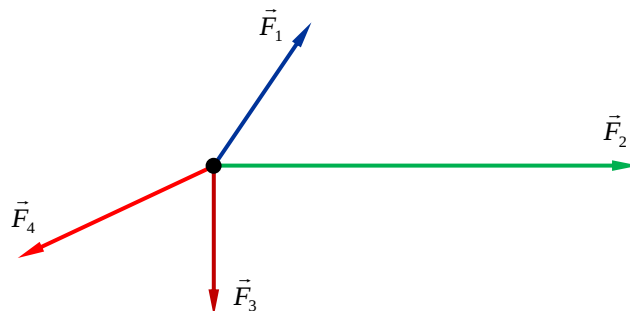


Figura 2-28

2.10. Condición de equilibrio de un sistema de fuerzas que actúan sobre un punto

Tal como se muestran en las figuras 2-27 y 2-28 si tenemos varias fuerzas aplicadas a un cuerpo, por ser estas magnitudes vectoriales podemos encontrar la suma de estos vectores o fuerzas, por cualquiera de los métodos ya vistos. En la figura 2-29 encontramos la suma de las fuerzas coplanarias y a esa suma la llamamos *resultante* de las fuerzas dadas, es decir

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \quad (2-14)$$

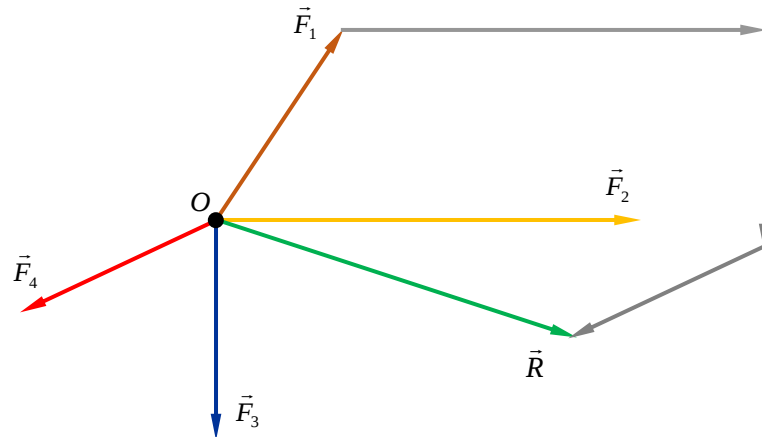


Figura 2-29

Conceptualmente, podemos decir que la *resultante* $\vec{R}$ de un sistema de fuerzas, es una fuerza que reemplaza o hace el mismo papel a los efectos de producir movimiento que las fuerzas dadas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$.

En lugar de colocar todas las fuerzas podemos colocar solamente la resultante $\vec{R}$, evidentemente la resultante sacará del reposo el punto u objeto donde están aplicadas las fuerzas.

Si ahora, sobre el cuerpo o punto O aplicamos una fuerza *equilibrante* $\vec{E}$ igual en módulo y de sentido contrario a la resultante $\vec{R}$ el objeto estará en *equilibrio*, tal como se observa en la figura 2-30

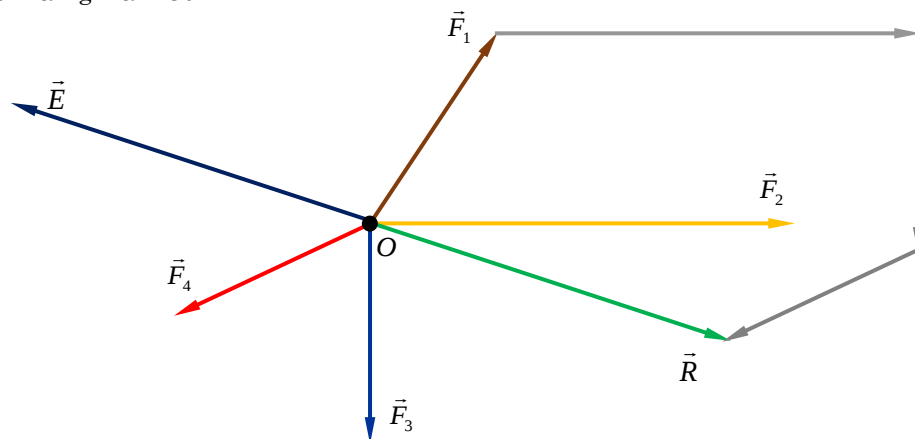


Figura 2-30

En realidad, por la ecuación 2-14 ($\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$) el sistema puede reducirse a dos fuerzas $\vec{E}$ y $\vec{R}$, es decir resultante y equilibrante, y se debe cumplir que

$$\vec{E} + \vec{R} = 0 \quad (2-15)$$

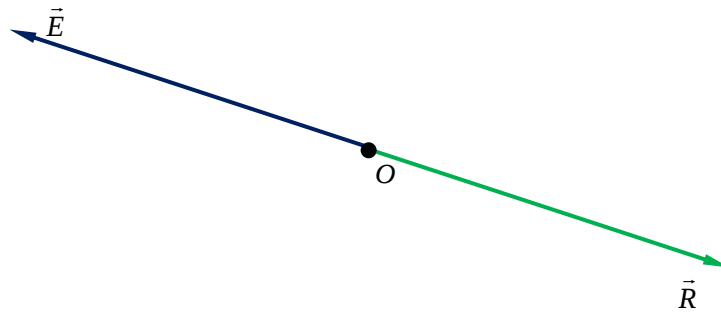


Figura 2-31

en este caso el cuerpo está en *equilibrio*, es decir que no se mueve o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.).

La ecuación 2-15 puede escribirse entonces como

$$\vec{E} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

En general la equilibrante $\vec{E}$ es una fuerza como cualquiera del sistema de fuerzas en equilibrio que bien podría llamarse $\vec{F}_5$, por lo tanto, podemos escribir la expresión anterior como

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 = 0 \quad (2-16)$$

Luego analizando la ecuación 2-16 diremos que *un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio, si la suma vectorial es igual a cero*, por lo tanto, la ecuación 2-16 puede resumirse a

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (2-17)$$

La ecuación 2-17 se denomina *condición de equilibrio de una partícula o primera condición de equilibrio de un cuerpo*.

Por ser la ecuación 2-17 una ecuación vectorial se puede expresar a la misma según sus componentes, para el caso más sencillo de dos direcciones (en la dirección del eje x y en la dirección del eje y) se tiene

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} \hat{i} + F_{iy} \hat{j}) = 0$$

debiéndose cumplir para cada término del sumando que

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} \hat{i} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} \hat{j} = 0$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots + F_{nx} = 0 \quad (2-18)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots + F_{ny} = 0 \quad (2-$$

19)

recordando que

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha$$

$$F_{iy} = F_i \sin \alpha$$

Ejemplo 2.13: Si un cuerpo de 15 Kg de peso está apoyado sobre una superficie horizontal, ¿cuánto vale la normal?

Datos:

$$P = 15 \text{ Kg}$$

Para que haya equilibrio en el sistema debe cumplirse la ecuación 2-17

Incógnita:

$$N = ?$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

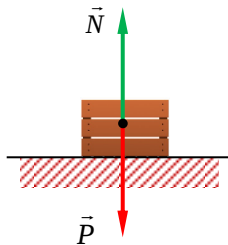


Figura 2-32

Como las fuerzas en la figura 2-32 no tienen componente sobre el eje x , debe cumplirse por lo tanto la condición establecida por la ecuación 2-19

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$\vec{N} + \vec{P} = 0$$

$$\vec{N} = -\vec{P} = -15 \text{ Kg}$$

el signo menos indica que la normal $\vec{N}$ es de sentido contrario al del peso $\vec{P}$.

Ejemplo 2.14: Un cuerpo de 12 Kg está suspendido de una soga. Determinar la tensión de en la soga o cuerda.

Datos:

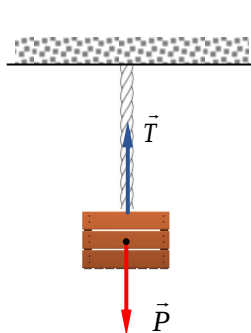
$$P = 12 \text{ Kg}$$

Considerando el cuerpo colgado de la soga, sobre este cuerpo se consideran aplicadas dos fuerzas: el peso $\vec{P}$ y la tensión en la cuerda $\vec{T}$.

Incógnita:

$$T = ?$$

Como no hay componentes de las fuerzas en la dirección del eje x , debe cumplirse por lo tanto la ecuación 2-19



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$\vec{T} + \vec{P} = 0$$

$$\vec{T} = -\vec{P} = -12 \text{ Kg}$$

el signo menos indica que la tensión $\vec{T}$ es de sentido contrario al del peso $\vec{P}$.

Figura 2-33

Ejemplo 2.15: Un automóvil de 900 Kg de peso comienza a bajar por una pendiente uniforme que tienen 8 metros de alto y 110 metros de largo. Determinar:

- ¿Qué fuerza $\vec{F}$ paralela al plano inclinado se requiere para evitar que el automóvil comience a bajar?
- ¿Cuánto vale la fuerza normal $\vec{N}$?

Datos:

$$P = 900\text{ Kg}$$

$$h = 8\text{ m}$$

$$l = 110\text{ m}$$

Incógnitas:

$$\text{a) } F = ?$$

$$\text{b) } N = ?$$

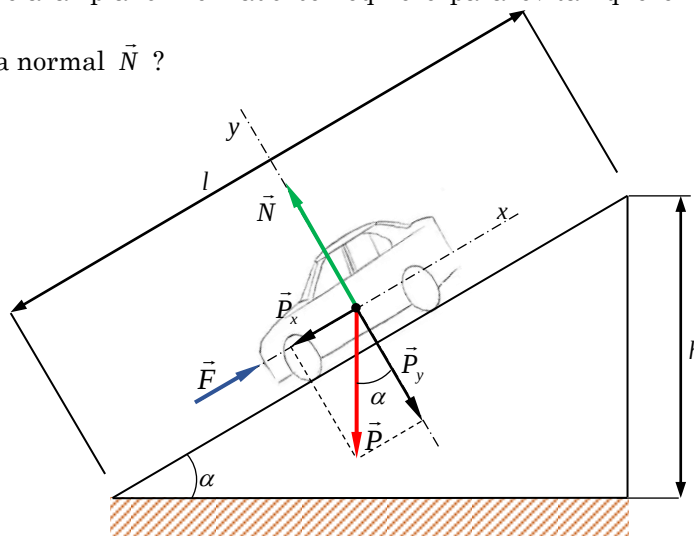


Figura 2-34

Primeramente, construimos un croquis de acuerdo con el enunciado del ejemplo, tal como el mostrado en la figura 2-34. Sobre el automóvil podemos considerar aplicada la fuerza peso $P = 900\text{ Kg}$. Esta fuerza peso puede descomponerse en dos direcciones: una paralela al plano inclinado P_x y otra perpendicular al plano inclinado P_y . Para que haya equilibrio debemos aplicar una fuerza $\vec{F}$ paralela al plano inclinado en la dirección x , de tal manera que se cumpla la primera condición de equilibrio establecida por la ecuación 2-18, la cual enuncia que

$$\sum F_x = 0 \quad F - P_x = 0$$

procediendo de manera similar sobre el eje y , tenemos

$$\sum F_y = 0 \quad N - P_y = 0$$

Como el peso $\vec{P}$ forma un ángulo α , se tiene que

$$P_x = P \sen \alpha \quad P_y = P \cos \alpha$$

Seguidamente, calcularemos el ángulo α a través de relaciones trigonométricas

$$\alpha = \arcsen \frac{h}{l} = \arcsen \frac{8\text{ m}}{110\text{ m}} = 4,17^\circ$$

reemplazando

$$P_x = P \sen \alpha = 900\text{ Kg} \sen 4,17^\circ = 65,45\text{ Kg}$$

$$P_y = P \cos \alpha = 900 \text{ Kg} \cos 4,17^\circ = 897,62 \text{ Kg}$$

a) De la ecuación $F - P_x = 0$ se tiene que

$$F = P_x = 65,45 \text{ Kg} \quad \text{y} \quad \alpha_F = 0^\circ \text{ (respecto al plano inclinado)}$$

b) De la ecuación $N - P_y = 0$ tenemos que

$$N = P_y = 897,62 \text{ Kg} \quad \text{y} \quad \alpha_N = 90^\circ \text{ (respecto al plano inclinado)}$$

Ejemplo 2.16: Un hombre ejerce una fuerza $\vec{F}$ de 7 Kg a lo largo de un mango de una cortadora de césped, figura 2-35, formando un ángulo de 40° con la horizontal. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza $\vec{F}$?

Datos:

$$F = 7 \text{ Kg}$$

$$\alpha = 40^\circ$$

Incógnitas:

$$F_x = ?$$

$$F_y = ?$$

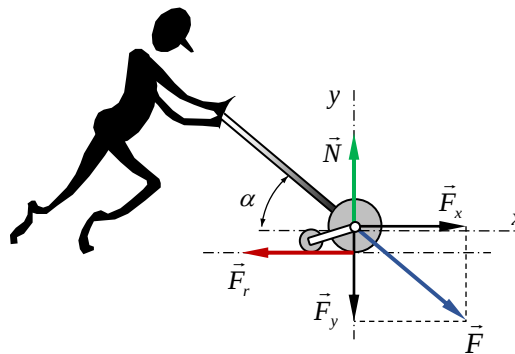


Figura 2-35

Llamamos a la componente horizontal de la fuerza $\vec{F}$, a $\vec{F}_x$ y a la componente vertical $\vec{F}_y$, de tal modo que sus módulos valen

$$F_x = F \cos 40^\circ = 7 \text{ Kg} \cos 40^\circ = 5,36 \text{ Kg}$$

$$F_y = F \sen 40^\circ = 7 \text{ Kg} \sen 40^\circ = 4,50 \text{ Kg}$$

Para que haya equilibrio a la fuerza $\vec{F}_y$, o componente vertical, se le opone una fuerza normal $\vec{N}$, de tal manera que se cumple

$$N - F_y = 0$$

$$N = F_y = 4,5 \text{ Kg}$$

La fuerza que se opone la componente horizontal $\vec{F}_x$, que es la que hace avanzar a la cortadora con movimiento uniforme, es la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$, de tal forma que se cumple que

$$F_x - F_r = 0$$

$$F_r = F_x = 5,36 \text{ Kg}$$

Ejemplo 2.17: Un cartel que pesa 35 Kg está sostenido por un alambre fijo al extremo de una barra de madera de peso despreciable, según se observa en la figura 2-36. Determinar la tensión $\vec{T}$ en el alambre y la fuerza $\vec{C}$ ejercida por la barra.

Datos:

$$P = 35\text{ Kg}$$

Incógnitas:

$$\vec{T} = ?$$

$$\vec{C} = ?$$

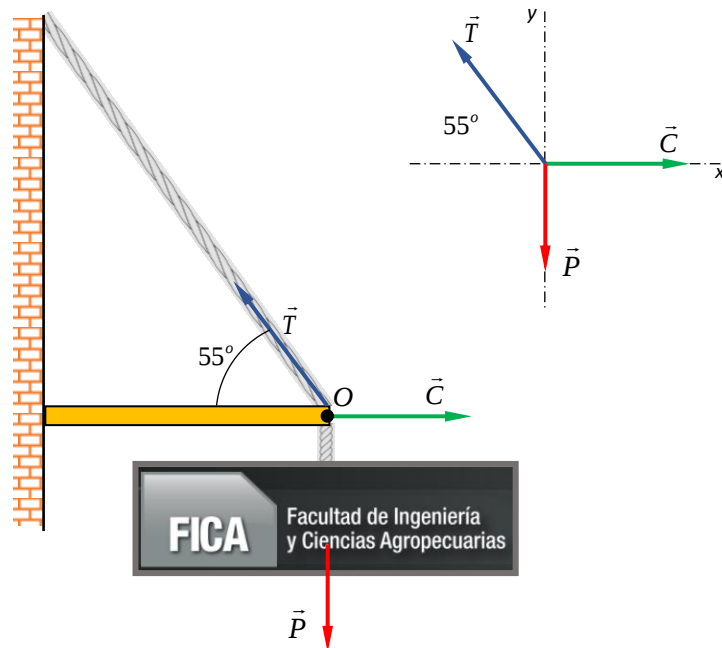


Figura 2-36

Podemos considerar como si todas las fuerzas están aplicadas en un punto O y hacer un diagrama de las fuerzas aplicadas en ese punto O . Aplicamos las dos condiciones de equilibrio a ese punto (ecuaciones 2-18 y 2-19), es decir

$$\sum F_x : C - T \cos 55^\circ = 0$$

$$\sum F_y : T \sin 55^\circ - P = 0$$

de la segunda expresión podemos determinar la tensión $\vec{T}$

$$T = \frac{P}{\sin 55^\circ} = \frac{35\text{ Kg}}{\sin 55^\circ} = 42,7\text{ Kg}$$

y reemplazando el valor de la tensión $\vec{T}$ en la primera ecuación obtenemos la fuerza $\vec{C}$

$$C = T \cos 55^\circ = 42,7\text{ Kg} \cos 55^\circ = 24,5\text{ Kg}$$

2.11. Momento de una fuerza respecto de un punto

En todos los ejemplos vistos anteriormente, se han considerado cuerpos sobre los cuales obran fuerzas concurrentes, o fuerzas que actúan sobre un punto. Si la suma de esas

fuerzas es cero ($\sum F = 0$), entonces podemos decir que el cuerpo está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. En cambio, si las fuerzas que actúan sobre el cuerpo no son concurrentes, el cuerpo puede rotar.

Ejemplo 2.18: Consideremos la figura 2-37. Si se aplican dos fuerzas de 10 Kg en el centro de una regla rígida ligera BOA , la regla queda en equilibrio, ya que se cumple la primera condición de equilibrio dada por la ecuación $\sum F = 0$.

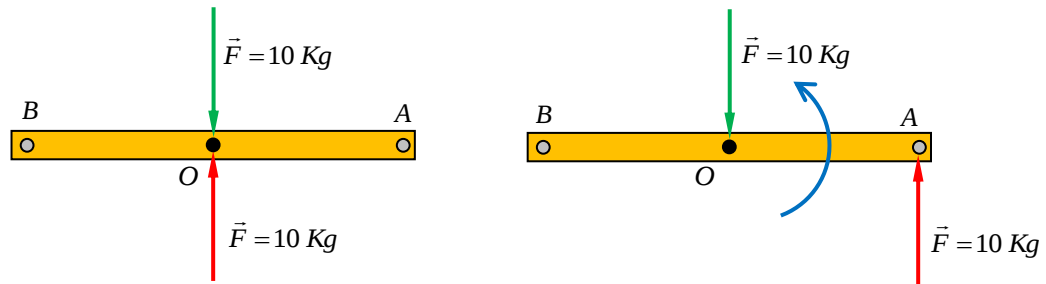


Figura 2-37

Si en cambio, ahora una de las fuerzas se aplica en el punto O y la otra en el punto A , la regla comenzará a girar, en sentido contrario a las agujas del reloj. La regla no está en equilibrio y sin embargo se cumple que $\sum F = 0$.

Las fuerzas no concurrentes producen una rotación o momento que hacen girar el cuerpo. En este caso el cuerpo no está en equilibrio, ya que está girando, y sin embargo cumple la primera condición de equilibrio, dada por la ecuación 2-17.

En la figura 2-37 suponiendo que la regla puede girar respecto al punto fijo O , llamaremos brazo de palanca a la distancia AO , y definiremos momento de la fuerza al producto de la fuerza $\vec{F}$ por el brazo de palanca OA , es decir

$$M = F \cdot \overline{OA} \quad (2-20)$$

$$M = \text{Fuerza} \cdot \text{brazo de palanca}$$

Ejemplo 2.19: Consideremos la figura 2-38. En este caso se está aplicando una fuerza de 3 Kg al pedal de una bicicleta, en el instante considerado el brazo de palanca vale $AO = 10\text{ cm}$, por lo tanto, el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto del punto O es

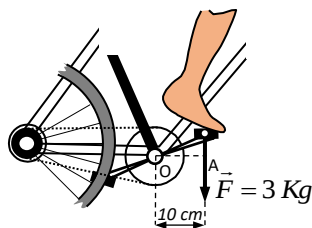


Figura 2-37

$$M = F \cdot \overline{AO} = 3\text{ Kg} \cdot 0,10\text{ m} = 0,3\text{ Kgm}$$

2.11.1. Signo del momento

Se le asigna el *signo positivo (+)* cuando el momento de la fuerza hace que el cuerpo gire en sentido contrario a las agujas del reloj, y *signo negativo (-)*, cuando el momento de la fuerza hace girar al cuerpo en sentido horario. Por lo tanto

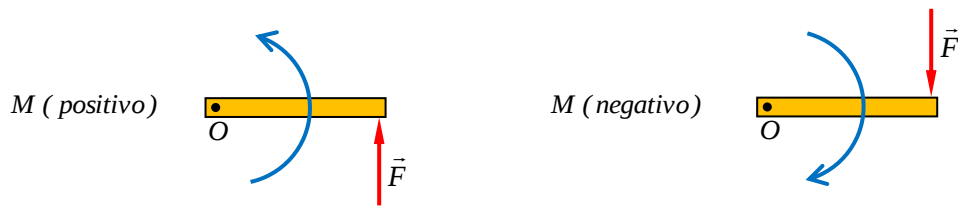


Figura 2-38

Ejemplo 2.20: En la figura 2-39 determinar el momento de las fuerzas respecto del punto

a) O y b) A.

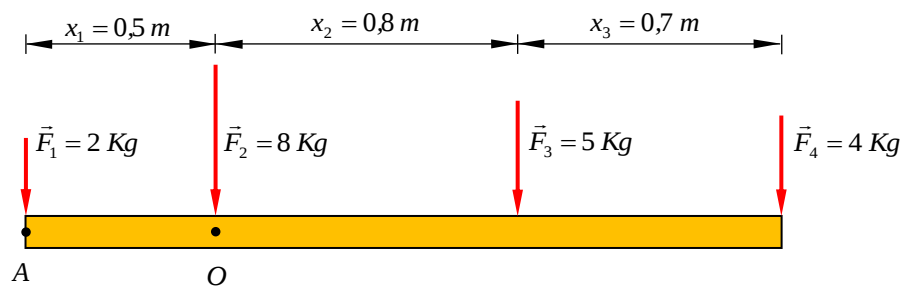


Figura 2-39

a) Momento respecto del punto A (aplicamos la ecuación 2-20 y la convención de signo según el sentido de giro, punto 2.11.1)

$$M_{F1} = F_1 \cdot 0 = 2 \text{ Kg} \cdot 0 = 0$$

$$M_{F2} = -F_2 \cdot x_1 = -8 \text{ Kg} \cdot 0,5 \text{ m} = -4 \text{ Kgm}$$

$$M_{F3} = -F_3 \cdot (x_1 + x_2) = -5 \text{ Kg} \cdot (0,5 + 0,8) \text{ m} = -6,5 \text{ Kgm}$$

$$M_{F4} = -F_4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = -4 \text{ Kg} \cdot (0,5 + 0,8 + 0,7) \text{ m} = -8 \text{ Kgm}$$

$$M_A = M_{F1} + M_{F2} + M_{F3} + M_{F4} = (-4 - 6,5 - 8) \text{ Kgm} = -18,5 \text{ Kgm}$$

b) Momento respecto del punto O

$$M_{F1} = +F_1 \cdot x_1 = +2 \text{ Kg} \cdot 0,5 \text{ m} = 1 \text{ Kg}$$

$$M_{F2} = -F_2 \cdot 0 = -8 \text{ Kg} \cdot 0 = 0$$

$$M_{F3} = -F_3 \cdot x_1 = -5 \text{ Kg} \cdot 0,8 \text{ m} = -4 \text{ Kgm}$$

$$M_{F4} = -F_4 \cdot (x_2 + x_3) = -4 \text{ Kg} \cdot (0,8 + 0,7) \text{ m} = -6 \text{ Kgm}$$

$$M_O = M_{F1} + M_{F2} + M_{F3} + M_{F4} = (+1 - 4 - 6) \text{ Kgm} = -9 \text{ Kgm}$$

2.12. Teorema de los momentos

Si tenemos una balanza, como la mostrada en la figura 2-40, conseguiremos el equilibrio tomando el momento de las fuerzas actuantes respecto del punto O , es decir

$$\text{Momento de las pesas} \quad M_{P_p} = +P_p \overline{OB}$$

$$\text{Momento del peso} \quad M_P = -P \overline{OA}$$

$$\text{Momento de las pesas} \quad M_{P_p} + \text{Momento del peso} \quad M_P = +P_p \overline{OB} - P \overline{OA} = 0$$

La balanza no girará cuando la suma de los momentos positivos y negativos que obran sobre un cuerpo respecto a un eje debe ser cero.

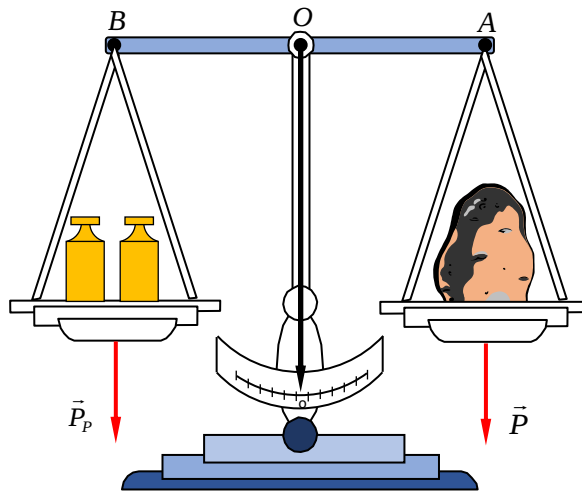


Figura 2-40

En general, para la *segunda condición de equilibrio del cuerpo* se debe cumplir que

$$M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_n = 0 \quad (2-21)$$

Ejemplo 2.21: Supongamos una polea que levanta un cuerpo de 40 Kg , figura 2-41. ¿Qué fuerza hay que aplicar para levantar dicho peso?

Dato:
 $P = 40 \text{ Kg}$

Tomando momento de las fuerzas aplicadas respecto del punto O , y aplicando la ecuación 2-21 se tiene

Incógnita:
 $\vec{F} = ?$

$$\sum_{i=1}^n M_n = 0$$

$$40 \text{ Kg} \overline{OB} - F \overline{OA} = 0$$

Despejando F

$$40 \text{ Kg} \overline{OB} = F \overline{OA}$$

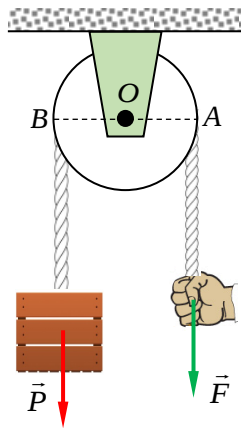


Figura 2-41

pero $\overline{OB} = \overline{OA} = \text{radio de la polea}$, por lo tanto

$$F = 40 \text{ Kg}$$

Ejemplo 2.22: Consideremos la carretilla mostrada en la figura 2-42. ¿Qué fuerza hay que aplicar para levantar un peso de 25 Kg?

Dato:

$$P = 25 \text{ Kg}$$

Tomando momento de las fuerzas aplicadas respecto del punto O , y aplicando la ecuación 2-21 tenemos

Incógnita:

$$\vec{F} = ?$$

$$\sum_{i=1}^n M_n = 0$$

$$-25 \text{ Kg } \overline{OA} + F \overline{OB} = 0$$

Despejando F , se tiene

$$F = \frac{25 \text{ Kg } \overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{25 \text{ Kg } 0,4 \text{ m}}{1,4 \text{ m}} = 7,14 \text{ Kg}$$

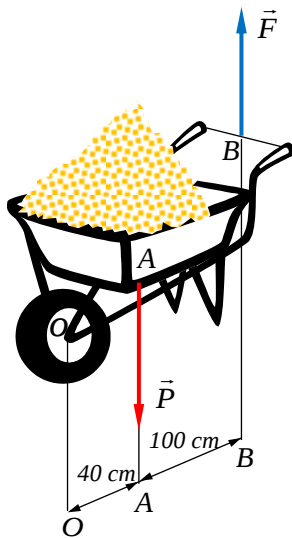
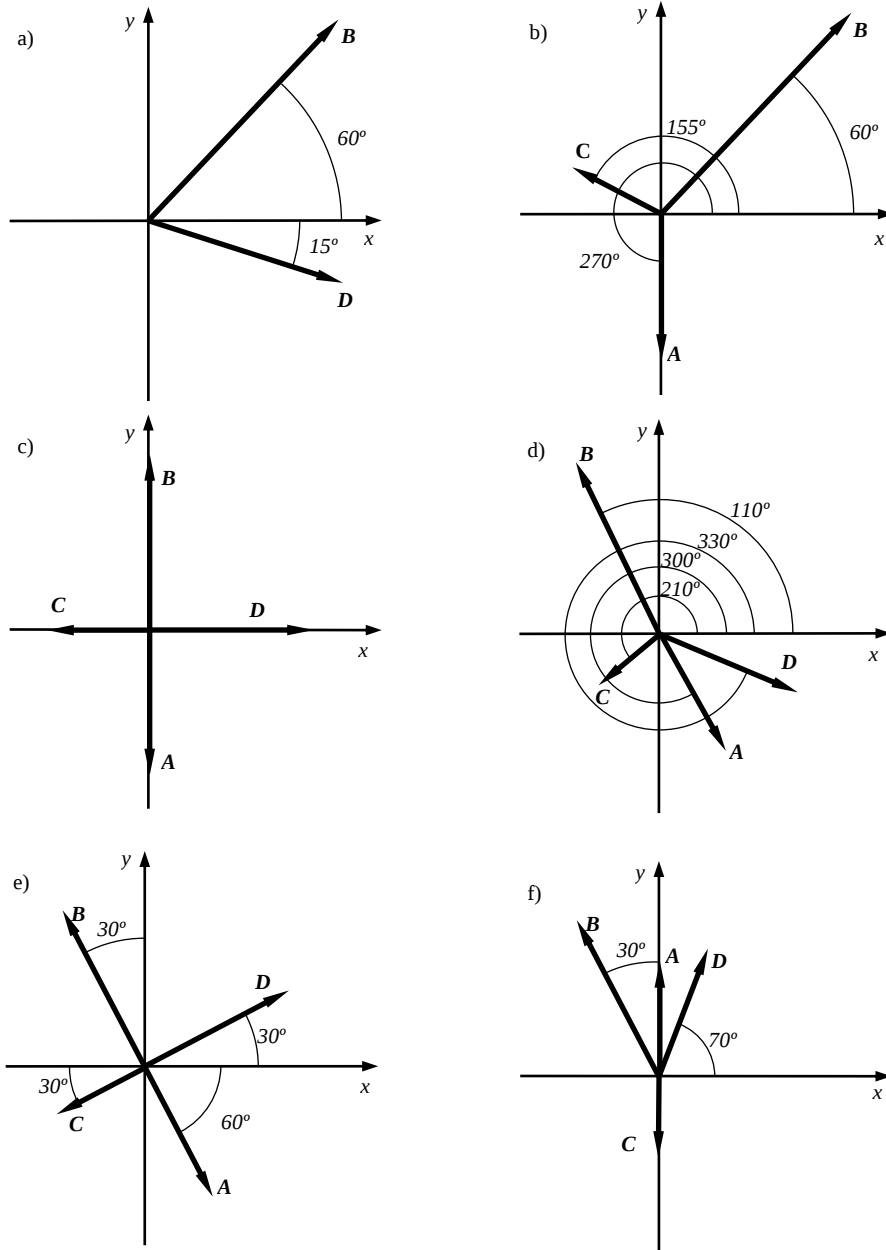


Figura 2-42

Se observa que para levantar un cuerpo de 25 Kg se necesita una fuerza menor de 7,14 Kg. Este tipo de dispositivo, entre muchos otros, en el cual cambia la magnitud de la fuerza aplicada se denominan *máquinas simples*.

B. Problemas para el Capítulo 2**PROBLEMA 1**

Dados los vectores: $A = 5$ unidades; $B = 10$ unidades; $C = 2$ unidades; $D = 8$ unidades. Sumar usando la regla del paralelogramo y haciendo uso de una escala adecuada.

**PROBLEMA 2**

Resolver el problema 1 por el método de la poligonal.

PROBLEMA 3

Dos vectores de 3 y 5 unidades están colocados de manera que sus direcciones forman un ángulo entre sí de 60° . Determinar por medios analíticos (teorema del coseno y teorema del seno) el valor de la resultante y el ángulo que ésta forma con el vector de 3 unidades.

PROBLEMA 4

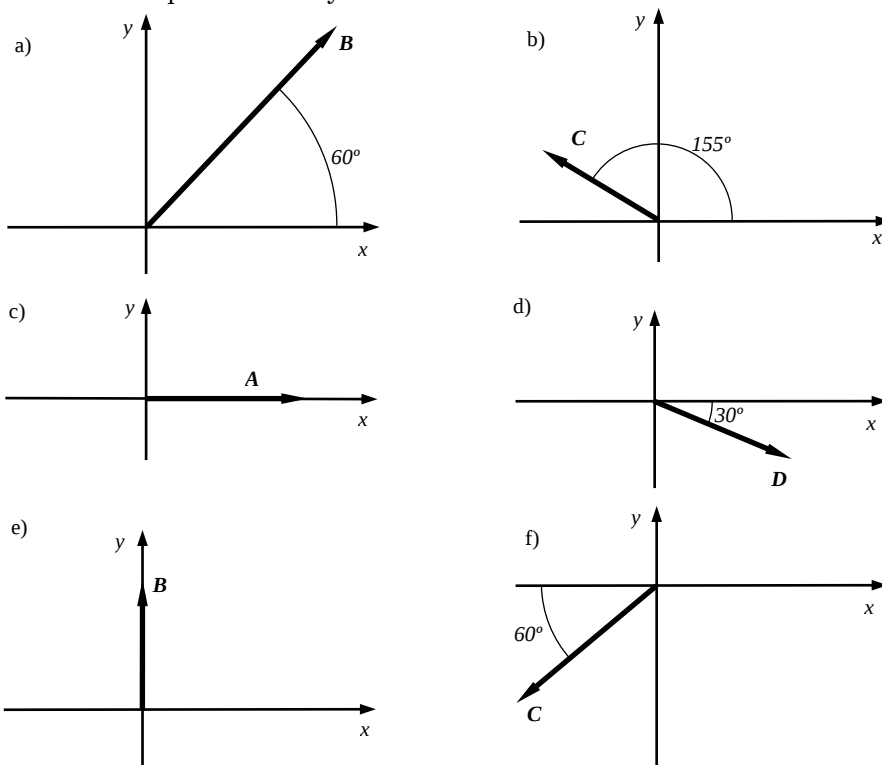
Dos vectores de 300 y 400 unidades están colocados de manera que sus direcciones forman un ángulo entre si de 90° . Determinar por medios analíticos (teorema del coseno y teorema del seno) el valor de la resultante y el ángulo que ésta forma con el vector de 300 unidades.

PROBLEMA 5

Dos vectores de 20 y 20 unidades están colocados de manera que sus direcciones forman un ángulo entre si de 45° . Determinar gráfica y analíticamente el valor de la resultante y el ángulo que ésta forma con uno de los vectores.

PROBLEMA 6

Dados los vectores: $A = 5$ unidades; $B = 10$ unidades; $C = 2$ unidades; $D = 8$ unidades. Determinar las componentes x e y de cada vector.

**PROBLEMA 7**

En el Problema 1, determinar el vector resultante o suma y el ángulo que forma con el eje positivo de las x aplicando el método de las componentes.

PROBLEMA 8

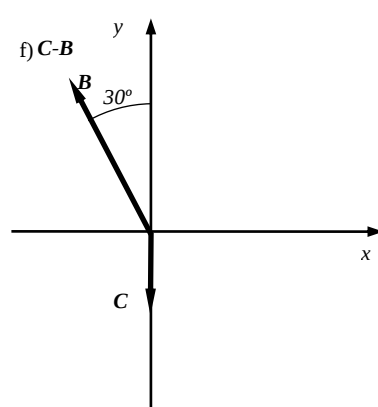
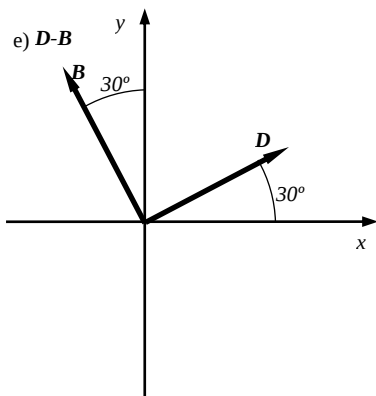
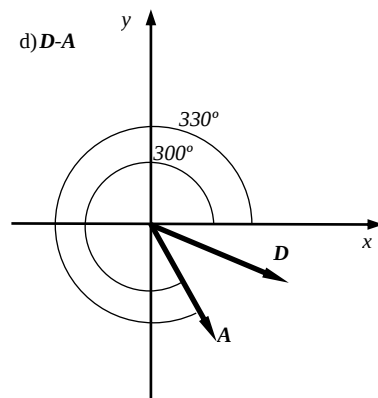
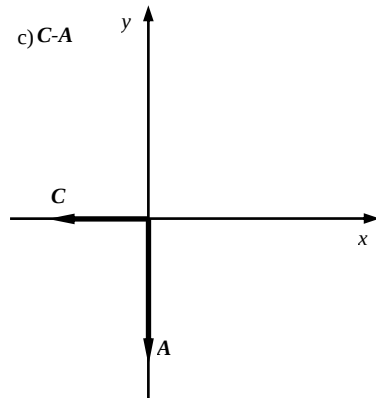
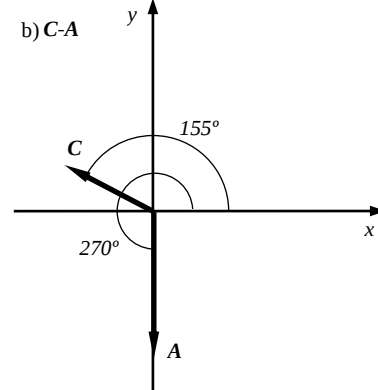
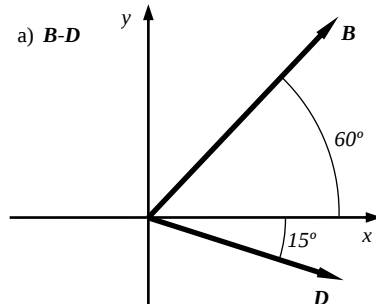
Determinar la resultante de los vectores A , B y C siendo: $A = 4\hat{i} + 3\hat{j}$; $B = 3\hat{i} - 7\hat{j}$ y $C = -2\hat{i} + 8\hat{j}$. Resolver gráfica y analíticamente.

PROBLEMA 9

Una persona camina 5 cuerdas hacia el Norte y luego 8 cuerdas hacia el Este. Calcular a que distancia se encuentra del punto de partida.

PROBLEMA 10

Dados los vectores: $A = 5$ unidades; $B = 10$ unidades; $C = 2$ unidades; $D = 8$ unidades. Restar usando la regla del paralelogramo haciendo uso de una escala adecuada.

**PROBLEMA 11**

Dos vectores de A y B de 3 y 5 unidades respectivamente están colocados de manera que sus direcciones forman un ángulo entre sí de 60° . Determinar por medios analíticos (teorema del coseno y teorema del seno) el valor del vector resta $A-B$ y el ángulo que éste forma con el vector de 3 unidades.

PROBLEMA 12

Dos vectores A y B de 300 y 400 unidades respectivamente, están colocados de manera que sus direcciones forman un ángulo entre sí de 90° . Determinar por medios analíticos (teorema del coseno y teorema del seno) el valor del vector resta $A-B$ y el ángulo que ésta forma con el vector de 300 unidades.

PROBLEMA 13

Del problema 10, restar usando el método de las componentes.

PROBLEMA 14

La magnitud del vector A es de 12 unidades y su componente según el eje y es de -7 unidades. Si el vector A se encuentra en el tercer cuadrante, determinar:

- la magnitud de la componente de A según el eje x
- el ángulo que forma con el sentido positivo del eje x .

PROBLEMA 15

Las componentes de un vector según el eje y y x valen 5 y -8 respectivamente. Determinar la magnitud del vector y el ángulo que forma respecto al sentido positivo del eje x .

PROBLEMA 16

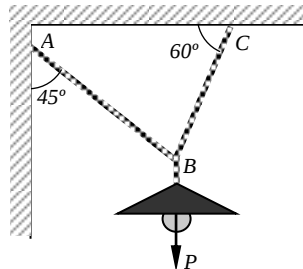
Se añade una fuerza A a una fuerza que tiene componentes x e y de $3N$ y $-5N$ respectivamente. La resultante de las dos fuerzas está en la dirección $-x$, y tiene una magnitud de $4N$. Encontrar la magnitud de las componentes x e y de A .

PROBLEMA 17

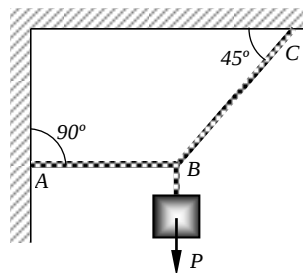
Sobre un cuerpo de $100Kg$, actúan cuatro fuerzas de valores $F_1 = 200\text{ N}$, $\alpha_1 = 30^\circ$; $F_2 = 300\text{ N}$, $\alpha_2 = 60^\circ$; $F_3 = 100\text{ N}$, $\alpha_3 = 30^\circ$; $F_4 = 250\text{ N}$, $\alpha_4 = 90^\circ$. Determinar la resultante (módulo y dirección) de todas las fuerzas.

PROBLEMA 18

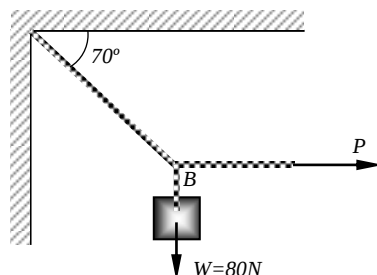
Determinar la tensión en cada una de las cuerdas AB y BC de la figura si el peso de la lámpara es de $400N$.

**PROBLEMA 19**

Determinar la tensión en cada una de las cuerdas AB y BC de la figura si el peso es de $998N$.

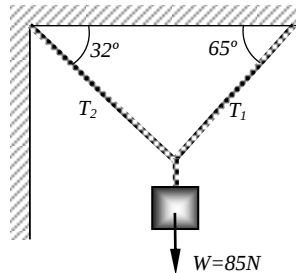
**PROBLEMA 20**

Que fuerza se necesita para sostener el peso de 80 N en la posición indicada en la figura.



PROBLEMA 21

La figura muestra un cuerpo de peso W suspendido. Determinar las tensiones T_1 y T_2 de las cuerdas.

**PROBLEMA 22**

Sobre un plano inclinado de 3 m de longitud y 2 m de altura se encuentra apoyado un cuerpo de 50 Kg . Determinar:

- la fuerza que ejerce perpendicularmente el plano
- la fuerza paralela al plano que debe aplicarse para mantener el cuerpo en equilibrio estático.
- dibujar el plano y representar las fuerzas mencionadas.

PROBLEMA 23

En dos postes distanciados 40 m , están atados a la misma altura los extremos de un cable de 44 m de longitud y peso despreciable. Determinar la fuerza en cada extremo del cable cuando de su punto medio cuelga un cuerpo de 220 Kg .

(Realizar un esquema del sistema)

PROBLEMA 24

Una lámpara de 15 Kg está suspendida por dos cables que forman un ángulo de 30° con la horizontal. Determinar:

- la fuerza que hace cada uno de los cables
- determinar el nuevo valor de la fuerza si ahora se quiere que el ángulo formado sea de 5° en lugar de 30° .

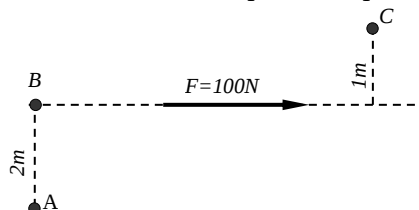
PROBLEMA 25

Un lanchón colocado en el centro de un canal está sujeto por cables que forman ángulos de 45° con el eje del canal. La fuerza que actúa sobre cada cable es de 490 N . Si el lanchón no se mueve. Determinar:

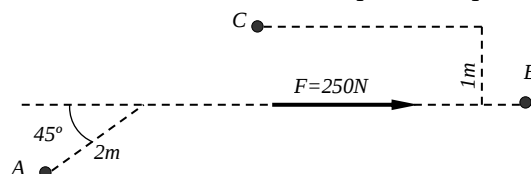
- la fuerza que ejerce el agua sobre el lanchón
- la fuerza de cada cable si la fuerza del agua fuera de 1480 N

PROBLEMA 26

Calcular el momento de la fuerza respecto los puntos A , B y C , tal como se muestra en la figura

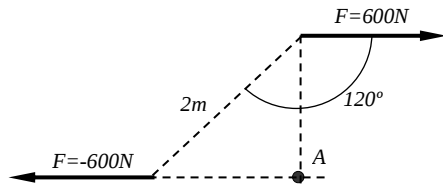
**PROBLEMA 27**

Calcular el momento de la fuerza respecto los puntos A , B y C , tal como se muestra en la figura.

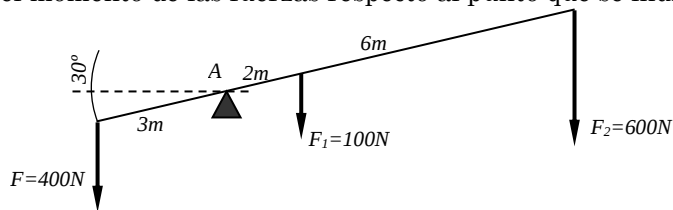


PROBLEMA 28

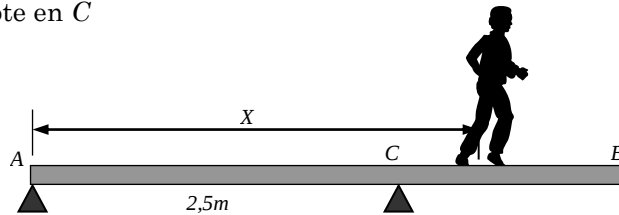
Calcular el momento de las fuerzas respecto al punto que se indica

**PROBLEMA 29**

Calcular el momento de las fuerzas respecto al punto que se indica

**PROBLEMA 30**

La viga uniforme de la figura tiene 4 m de longitud y pesa 980 N . La viga puede girar respecto al punto C . La viga reposa en los puntos A y C . Un hombre de 740 N camina sobre la viga partiendo de A . Calcular la máxima distancia que el hombre puede caminar antes que la viga rote en C

**PROBLEMA 31**

La resultante de dos fuerzas paralelas de igual sentido es de 100 N . Una de las fuerzas es de 40 N y está a $0,5\text{ m}$ de la resultante. Determinar el valor de la otra fuerza y a qué distancia se encuentra de la resultante.

PROBLEMA 32

La resultante de dos fuerzas paralelas de sentido contrario es de 120 N . La fuerza mayor es de 180 N y está a $0,09\text{ m}$ de la resultante. Determinar el valor de la otra fuerza y a qué distancia se encuentra de la resultante.

Dinámica

3-1. Introducción

3-2. Segunda ley de Newton. Principio de masa

3-3. Peso y masa

3-4. Sistemas de unidades

3-5. Primera ley de newton. Principio de inercia

3-6. Equilibrio dinámico

3-7. Tercera ley de Newton. Principio de acción y reacción

3-8. Densidad y peso específico

C. Problemas

Dinámica

3.1. Introducción

En el capítulo 2, se introdujo intuitivamente el concepto de fuerza como: *fuerza es la causa del movimiento* o *fuerza es la interacción entre dos cuerpos*.

Además, se observó que cuando las fuerzas aplicadas a un cuerpo están en equilibrio ($\sum \vec{F} = 0$ y $\sum M = 0$), el cuerpo no se mueve o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme respecto de un sistema de referencia.

Hay ejemplos clásicos de fuerzas, la fuerza peso $\vec{P}$ (ejemplo 2-13, 2-15), la fuerza normal $\vec{N}$ (ejemplo 2-13, 2-15), la tensión de una cuerda $\vec{T}$ (ejemplo 2-14, 2-17), la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ (ejemplo 2-16). Hay que destacar que siempre la fuerza de rozamiento es una fuerza que se opone al movimiento.

Ejemplo 3.1: Supongamos un automóvil que viene por la carretera con una determinada velocidad constante $\vec{v} = 80 \text{ Km/h}$, figura 3-1 a). Si el conductor no frena, pero pone el automóvil en “punto muerto” el cambio, es decir que el motor no entrega “más fuerza” sobre las ruedas, figura 3-1 b), se verá que a medida que pasa el tiempo el automóvil retarda su marcha y al cabo de un cierto tiempo se frena y a la larga se detiene. Esto debemos atribuirlo a la acción de la fuerza de rozamiento, figura 3-1 c).

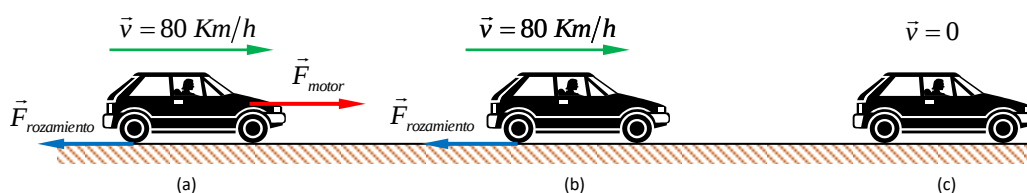


Figura 3-1

La fuerza de rozamiento es la causa de que el auto disminuya la velocidad y a lo largo de un cierto recorrido se detenga.

La fuerza de rozamiento produce un cambio de velocidad o aceleración de un cuerpo.

Al comienzo del movimiento, ejemplo 3-1, cuando el automóvil se desplaza con el motor aplicando una fuerza que denominamos $\vec{F}_{motor}$, que es igual y de sentido contrario a la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{rozamiento}$, cumpliéndose en este caso que

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$F_{motor} - F_{rozamiento} = 0$$

es decir que la suma de las fuerzas aplicadas al automóvil en la dirección del movimiento (eje x) es nula, en este caso el automóvil está desplazándose con movimiento rectilíneo uniforme, $\vec{v} = 80 \text{ Km/h} = \text{constante}$.

Como conclusión, podemos decir que cuando no se cumple la primera condición de equilibrio de fuerzas ($\sum \vec{F} = 0$), a partir de la figura 3-1 b) es decir cuando actúa

solamente la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$, se produce un cambio de velocidad o una aceleración, luego hay un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.). En el caso del ejemplo 3-1, corresponde a una desaceleración.

3.2. Segunda ley de Newton. Principio de masa

Este principio tiene en cuenta el caso de cuando no hay equilibrio en las fuerzas aplicadas al cuerpo, es decir que no se cumple la primera condición de equilibrio.

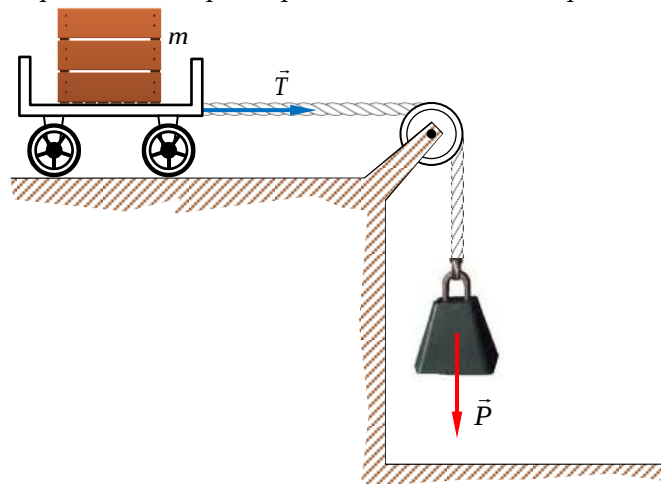


Figura 3-2

Consideremos el dispositivo mostrado figura 3-2. El mismo consiste en un carrito cargado con tres bloques iguales de masa m , y unido al carrito mediante una cuerda que pasa por una rueda o polea una pesa $\vec{P}$, la cual está colgando y por lo tanto tira al carrito. La pesa $\vec{P}$ aplica sobre el carrito una tensión $\vec{T}$ que hace que el mismo se mueva cambiando continuamente la velocidad, consecuentemente el carrito adquiere una aceleración $\vec{a}$, luego podremos decir que la tensión es proporcional a la aceleración

$$\vec{T} \propto \vec{a} \quad (3-1)$$

esto significa que, si aumento la magnitud del peso $\vec{P}$ aumenta la tensión $\vec{T}$ y por lo tanto el carrito aumenta su velocidad $\vec{v}$ y por consiguiente su aceleración $\vec{a}$.

En la expresión 3-1 para cambiar el signo de proporcionalidad ($\propto$) por el signo igual ($=$) debemos colocar una constante de proporcionalidad que llamaremos *masa* m del carrito, y denominando a la tensión $\vec{T}$ en general como $\vec{F}$ (es decir $\vec{T} = \vec{F}$), podemos escribir la siguiente ecuación

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (3-2)$$

a la expresión 3-2 se la conoce como la *Segunda Ley de Newton* y es una relación entre la fuerza aplicada al carrito, su masa y la aceleración que este adquiere.

Se observa que si en lugar de tener $3m$ sobre el carrito, sacamos una m quedando por lo tanto $2m$ sobre él, y dejamos libre el peso $\vec{P}$ veremos que el carrito adquiere una *mayor aceleración*, de donde podemos obtener como conclusión que la aceleración que adquiere el carrito y la masa del mismo son magnitudes inversamente proporcionales, es decir si disminuye la masa m sobre el carrito entonces aumenta la aceleración $\vec{a}$. Esta última observación también se puede obtener a través de la ecuación 3-2, en la cual si la fuerza $\vec{F}$ aplicada es constante se tiene que

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}} \quad (3-3)$$

donde aquí también se observa que al aumentar m , y al ser constante la fuerza $\vec{F}$, debe disminuir la aceleración $\vec{a}$, y viceversa. Por último, de la ecuación 3-2 también podemos obtener

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (3-4)$$

3.3. Peso y masa

La ecuación 3-2 es una ecuación general que puede aplicarse al caso particular de un cuerpo situado en la Tierra. Sabemos que sobre todo cuerpo situado en la tierra hay aplicada una fuerza peso $\vec{P}$, que ejerce la Tierra sobre el cuerpo.

Supongamos un cuerpo apoyado sobre una superficie, figura 3-3

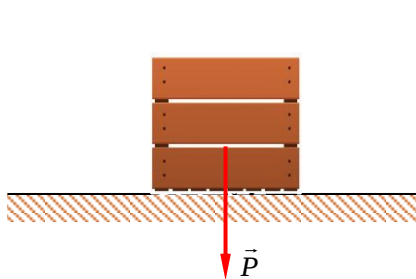


Figura 3-3

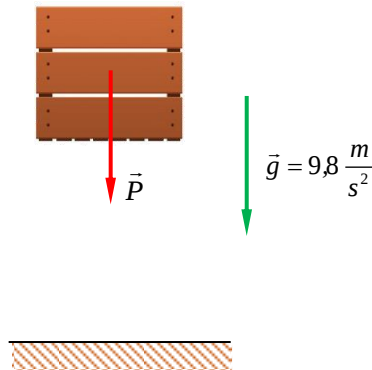


Figura 3-4

en este caso la fuerza $\vec{F}$ de la ecuación 3-2, es el propio peso $\vec{P}$, y como no está en movimiento se tiene que

$$\vec{F} = \vec{P}$$

En cambio, si en vez de tener un cuerpo apoyado, se lo deja caer, figura 3-4, la fuerza peso $\vec{P}$ es la causante de la caída y se produce como consecuencia (Capítulo 1, punto 1-9) una caída libre con una aceleración $\vec{a}$ igual a la aceleración de la gravedad $\vec{a} = \vec{g} = 9,8 \text{ m/s}^2$, y por lo tanto la ecuación 3-2 queda

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad (3-5)$$

Luego el peso $\vec{P}$ se obtiene de multiplicar la masa m del cuerpo por la aceleración de la gravedad $\vec{g}$. El peso $\vec{P}$ no es lo mismo que la masa m , son solo magnitudes proporcionales.

La masa es la cantidad de materia que tiene un cuerpo, en cambio el peso es esa cantidad de materia multiplicada por la aceleración de la gravedad en la Tierra.

Por ejemplo, si nos trasladamos a la Luna, como cambia la aceleración de la gravedad en la Luna el peso de un cuerpo en ella es diferente que el peso del mismo cuerpo en la Tierra,

pero la masa es la misma, por lo tanto, *la cantidad de materia que tiene un cuerpo o masa es la misma en cualquier lugar.*

3.4. Sistemas de unidades

Existen varios sistemas de unidades de medidas, aquí en este curso solamente haremos referencia a los siguientes sistemas

$$MKS \text{ o SI} \quad - \quad CGS \quad - \quad \text{Técnico}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 3-5, y tomando la masa o cantidad de materia de la pesa patrón de 1 Kg que se encuentra en la *Oficina de Pesas y Medidas*, le asignamos la cantidad de 1 Kg masa en el sistema MKS (cuyas unidades fundamentales son el metro, Kilogramo y segundo) o Sistema Internacional (SI) y mido la aceleración en m/s^2 .

A partir de la ecuación 3-2 ($\vec{F} = m \vec{a}$)

$$\left| 1 \text{ Kg } 1 \frac{m}{s^2} = 1 \text{ Newton (N)} \right|$$

la unidad de la fuerza en el Sistema Internacional o MKS se le denomina *Newton (N)*.

En el sistema CGS (cuyas unidades fundamentales son el centímetro, gramo y segundo) se toma la masa de 1 gramo y la aceleración se expresa en cm/s^2 , luego la fuerza se expresa, según la ecuación 3-2

$$\left| 1 \text{ g } 1 \frac{cm}{s^2} = 1 \text{ Dina (D)} \right|$$

la unidad de la fuerza en el CGS se le denomina *Dina (D)*.

En el Sistema Técnico, se toma la misma pesa patrón que se halla en la Oficina de Pesas y Medidas, pero de ella se toma el peso de esa pesa y se le asigna el valor de $1 \vec{Kg}$ (un kilogramo fuerza = Kgf) y como por la ecuación 3-3 ($m = \vec{F}/\vec{a}$), tenemos que

$$\left| \frac{Kgf}{\frac{m}{s^2}} = 1 \text{ Unidad Técnica de Masa (UTM)} \right|$$

Podemos confeccionar la siguiente tabla con los sistemas de unidades mencionados

TABLA 3-1
Sistemas de Unidades

SISTEMA de UNIDADES		m	$\vec{a}$	$\vec{F} = m \vec{a}$
	MKS (SI)	Kg	m/s^2	$Kg \text{ m}/s^2 = N$
	CGS	g	cm/s^2	$g \text{ cm}/s^2 = D$
	TECNICO	$\frac{\vec{Kg}}{m/s^2} = UTM$	m/s^2	$\frac{\vec{Kg}}{m/s^2} m/s^2 = \vec{Kg}$

3.4.1. Equivalencias

El peso de la pesa patrón vale por la ecuación 3-5

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

$$1 \vec{Kg} = 1 Kg \ 9,8 \frac{m}{s^2}$$

pero $Kg \ m/s^2 = N$, entonces

$$1 \vec{Kg} = 9,8 N$$

esta igualdad es la equivalencia entre el Sistema Técnico ($\vec{Kg}$) y el Sistema Internacional (N).

Por consiguiente, para pasar una fuerza que esta expresada en el Sistema Técnico ($\vec{Kg}$) debo *multiplicar* por $9,8 m/s^2$ para convertirla al Sistema Internacional (N). Caso inverso, para pasar una fuerza que esta expresada en el Sistema Internacional (N) debo *dividir* por $9,8 m/s^2$ para convertirla al Sistema Técnico ($\vec{Kg}$).

La equivalencia entre el Sistema Internacional o MKS y el Sistema CGS, es la siguiente

$$1 N = 1 Kg \ 1 \frac{m}{s^2}$$

$$1 N = 1 \cancel{Kg} \ 1 \frac{m}{s^2} \frac{1000 g}{1 \cancel{Kg}} \frac{100 cm}{1 m}$$

$$1 N = 100000 g \frac{cm}{s^2} = 1 \cdot 10^{+5} Dina$$

Por lo tanto, para pasar una fuerza que esta expresada en el Sistema Internacional (N) debo *multiplicar* por $1 \cdot 10^{+5} g \ cm/s^2$ para convertirla al Sistema CGS ($Dina$). Caso inverso, para pasar una fuerza que esta expresada en el Sistema CGS ($Dina$) debo *dividir* por $1 \cdot 10^{+5} g \ cm/s^2$ para convertirla al el Sistema Internacional (N).

La equivalencia entre el Sistema Técnico y el Sistema CGS, es la siguiente

$$1 \vec{Kg} = 9,8 N$$

$$1 \vec{Kg} = 9,8 N \frac{1 \cdot 10^{+5} Dina}{1 N}$$

entonces

$$1 \vec{Kg} = 9,8 \cdot 10^{+5} Dina$$

Por lo tanto, para pasar una fuerza que esta expresada en el Sistema Técnico ($\vec{Kg}$) debo *multiplicar* por $980.000 g \ cm/s^2$ para convertirla al Sistema CGS ($Dina$). Caso inverso, para pasar una fuerza que esta expresada en el Sistema CGS ($Dina$) debo *dividir* por $980.000 g \ cm/s^2$ para convertirla al el Sistema Técnico ($\vec{Kg}$).

Ejemplo 3.2: Si sobre un cuerpo de 18 Kg se le aplica una fuerza de $\vec{F} = 5 \vec{Kg}$, determinar la aceleración del mismo.

Datos:

$$m = 18 \text{ Kg}$$

$$\vec{F} = 5 \vec{Kg}$$

Incógnita:

$$a = ?$$

Como regla, es indispensable para resolver un problema como primera medida tener todos los datos expresados en el mismo sistema de unidades.

En este ejemplo, el dato de la masa $m = 18 \text{ Kg}$ está el Sistema Internacional (ver Tabla 3-1), entonces por ejemplo adoptaremos para trabajar este sistema de unidades. La fuerza para el Sistema Internacional es el Newton, nuestra fuerza es $\vec{F} = 5 \vec{Kg}$ expresada en el Sistema Técnico, por consiguiente, deberemos convertir la unidad de la fuerza. Entonces, recordando la equivalencia

$$1 \vec{Kg} = 9,8 \text{ N}$$

$$\vec{F} = 5 \vec{Kg} \frac{9,8 \text{ N}}{1 \vec{Kg}} = 49 \text{ N}$$

nuestros datos son ahora los siguientes:

Datos:

$$m = 18 \text{ Kg}$$

$$\vec{F} = 49 \text{ N}$$

Ahora si, podemos determinar el valor de la aceleración a través de la ecuación 3-4

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{49 \text{ N}}{18 \text{ Kg}} = \frac{49 \text{ Kg m/s}^2}{18 \text{ Kg}} = 2,72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Podríamos haber optado, anteriormente, que el dato $18 \vec{Kg}$ fuera el peso del cuerpo (Sistema Técnico), entonces en este caso será $\vec{P} = 18 \vec{Kg}$, por lo que tendremos que determinar la masa a través de la expresión 3-5

$$m = \frac{P}{g} = \frac{18 \vec{Kg}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,836 \frac{\vec{Kg}}{\text{m/s}^2} = 1,836 \text{ UTM}$$

entonces nuestros datos son

Datos:

$$m = 18 \frac{\vec{Kg}}{\text{m/s}^2}$$

$$\vec{F} = 5 \vec{Kg}$$

reemplazando en la ecuación 3-4 se tiene

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5 \vec{Kg}}{1,836 \frac{\vec{Kg}}{\text{m/s}^2}} = 2,72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

obtenemos, como es de esperar el mismo resultado.

Hay que destacar que en la ecuación 3-2 si la fuerza $\vec{F}$ aplicada al cuerpo es constante entonces el mismo se desplazará con aceleración constante ($\vec{a} = cte$), y por lo tanto el movimiento resultante es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.), tal como se desarrolló en el capítulo 1, punto 1-8.

Ejemplo 3.3: Indique para el siguiente párrafo cuál es la respuesta correcta. *Si un cuerpo se mueve con un movimiento con aceleración constante . . .*

- a) sobre el cuerpo actúan fuerzas de intensidad variable.
- b) actúan fuerzas de resultante nula.
- c) actúan fuerzas que tienen resultante constante.
- d) actúan fuerzas que no se pueden determinar.
- e) ninguna de las anteriores.

Evidentemente la respuesta correcta es la opción c); ya que como la resultante o sumatoria de las fuerzas aplicadas al cuerpo es constante, por la ecuación 3-4 $\vec{a} = \vec{F}/m$, se deduce que la $\vec{a}$ al ser también la masa constante, la aceleración es constante.

Ejemplo 3.4: Un cuerpo de 3 Kg bajo la acción de una fuerza $\vec{F} = \text{constante}$ recorre, partiendo del reposo, 12 metros en 8 segundos. Determinar el valor de la fuerza $\vec{F}$. Expresar el resultado en el Sistema Internacional y en el Sistema Técnico.

Datos:

$$m = 3 \text{ Kg}$$

$$\vec{F} = cte$$

$$v_o = 0$$

$$x = 12 \text{ m}$$

$$t = 8 \text{ s}$$

Como la fuerza aplicada es constante, la aceleración con la que se mueve el cuerpo es constante, y se moverá por lo tanto con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Entonces podremos aplicar las ecuaciones correspondientes desarrolladas en el Capítulo 1. De la ecuación 1-3 tenemos

$$x = v_o t + 1/2 a t^2$$

Incógnita:

$$\vec{F} = ?$$

pero $v_o = 0$, entonces

$$x = 1/2 a t^2$$

despejando la aceleración

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2}{8^2} \frac{12 \text{ m}}{\text{s}^2} = 0,375 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Para determinar la fuerza aplicando la ecuación 3-2,

$$\vec{F} = m \vec{a} = 3 \text{ Kg } 0,375 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,125 \text{ N (Sistema Internacional)}$$

$$\vec{F} = 1,125 \text{ N } \frac{1 \text{ Kg}}{9,8 \text{ N}} = 0,115 \text{ Kg (Sistema Técnico)}$$

Ejemplo 3.5: Si una fuerza $\vec{F} = \text{constante}$ actúa sobre un cuerpo, ¿cuántas veces aumenta o disminuye su aceleración, cuando ...

- a) ... se duplica el tiempo que actúa la fuerza?
 b) ... se duplica su masa?
 c) ... se reduce su masa a la tercera parte?

a) Como la $\vec{F} = \text{constante}$, entonces la $\vec{a} = \text{constante}$ y aunque varía el tiempo de aplicación de la fuerza, la aceleración se mantiene constante, ni aumenta ni disminuye. El tiempo solo se traduce una mayor distancia recorrida por el cuerpo.

b) Por la ecuación 3-2, tenemos que

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

la aceleración resulta

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

si la masa se duplica, es decir $m' = 2m$, entonces

$$\vec{F} = m' \vec{a}'$$

la aceleración resulta

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m'} = \frac{\vec{F}}{2m} = \frac{\vec{a}}{2}$$

luego, la aceleración $\vec{a}'$ al duplicarse la masa disminuye a la mitad.

c) Si la fuerza vale

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

la aceleración resulta

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

si la masa se reduce a la tercera parte, es decir $m' = m/3$, entonces

$$\vec{F} = m' \vec{a}'$$

la aceleración resulta

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m'} = \frac{\vec{F}}{m/3} = \frac{3\vec{F}}{m} = 3\vec{a}$$

luego, la aceleración $\vec{a}'$ aumentará tres veces al disminuir la masa 1/3.

3.5. Primera ley de Newton. Principio de inercia

Por la segunda ley de Newton, expresada por la ecuación 3-2,

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

nos dice que, si aplicamos fuerzas a un cuerpo, su resultante produce una aceleración del mismo.

Ahora bien, ¿qué sucede si la resultante de las fuerzas aplicadas es cero o si no hay fuerzas aplicadas al cuerpo?

Si la resultante de las fuerzas es nula o no hay fuerzas aplicadas resulta

$$\sum \vec{F} = 0$$

luego

$$m \vec{a} = 0$$

entonces

$$\vec{a} = 0$$

no hay aceleración, por lo tanto, el cuerpo está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U).

De acuerdo con esto, la segunda ley de Newton, o principio de inercia, dice *todo cuerpo tiende a permanecer en el estado en que encuentra, si está libre de fuerzas* ($\sum \vec{F} = 0$). Es decir, si está en reposo, seguirá en reposo, o si está en movimiento, tenderá a hacerlo con movimiento rectilíneo uniforme.

Como puede verse la 1^{era} ley de Newton o principio de inercia, es una consecuencia de la 2^{da} ley de Newton para el caso particular en que se cumple la condición $\sum \vec{F} = 0$.

También podemos decir que el principio de inercia es equivalente a la primera condición de equilibrio de un sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

3.6. Equilibrio dinámico

Podemos expresar la ecuación 3-2, detallando todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es decir

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n = m \vec{a} \quad (\text{ecuación vectorial}) \quad (3-6)$$

y si las fuerzas actúan en una sola dirección la expresión anterior la podemos escribir como

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = m a \quad (\text{ecuación escalar}) \quad (3-7)$$

Ejemplo 3.6: Sobre un cuerpo de 30 g actúa una fuerza de $\vec{F} = 15 \text{ Dina}$ en la dirección del movimiento y una fuerza de rozamiento de $\vec{F}_r = 8 \text{ Dina}$. Determinar la aceleración del cuerpo.

Datos:

$$m = 30 \text{ g}$$

$$\vec{F} = 15 \text{ Dina}$$

$$\vec{F}_r = 8 \text{ Dina}$$

Incógnita:

$$\vec{a} = ?$$

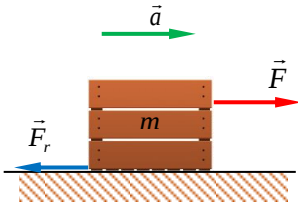


Figura 3-5

Hacemos primeramente un esquema de las fuerzas actuantes sobre el cuerpo, como el mostrado en la figura 3-5.

Sabemos, que por la naturaleza de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$, esta se opone al movimiento, y por lo tanto será opuesta a la fuerza aplicada $\vec{F}$.

Utilizando la ecuación 3-7, se tiene

$$F - F_r = m a$$

de donde

$$a = \frac{F - F_r}{m} = \frac{(15 - 8) \text{ Dina}}{30 \text{ g}} = \frac{7 \text{ g cm/s}^2}{30 \text{ g}} = 0,233 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

la aceleración tiene el sentido de la fuerza aplicada $\vec{F}$ y sentido contrario a la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$.

Ejemplo 3.7: Una persona de 70 Kg se halla parada sobre una balanza en un ascensor.

¿Qué lectura indicará la balanza cuando ...

- ... el ascensor está detenido?
- ... cuando asciende con una aceleración de $a = 1,5 \text{ m/s}^2$?
- ... cuando desciende con una aceleración de $a = -1,5 \text{ m/s}^2$?
- ... cuando cae con una aceleración de $a = g = -9,8 \text{ m/s}^2$?

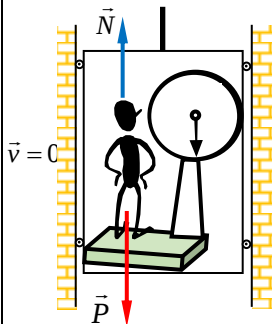


Figura 3-6 a)

a) Realizamos primeramente un esquema de las fuerzas actuantes sobre la persona, figura 3-6 a). Actuarán solamente la normal $\vec{N}$ y el peso $\vec{P}$. Como el ascensor está detenido, se cumple que

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$N - P = 0$$

$$N = P = m g = 70 \text{ Kg } 9,8 \text{ m/s}^2 = 686 \text{ N} = 70 \text{ Kg}$$

la fuerza que ejerce el piso sobre el hombre es igual a su peso (70 Kg) y la balanza indicará 70 Kg .

b) Aplicando la segunda ley de Newton, ecuación 3-7, a las fuerzas aplicadas sobre el hombre, figura 3-6 b), se tiene

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$-P + N = m a$$

$$N = P + m a = m g + m a = m (g + a)$$

$$N = 70 \text{ Kg } (9,8 + 1,5) \text{ m/s}^2 = 791 \text{ N} = 80,7 \text{ Kg}$$

En este caso como la normal es igual a lo que indica la balanza, la balanza indicará un peso mayor que el peso del hombre.

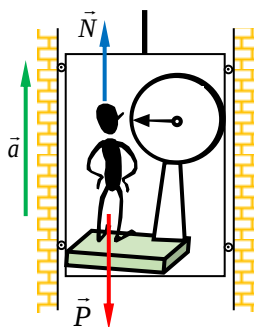


Figura 3-6 b)

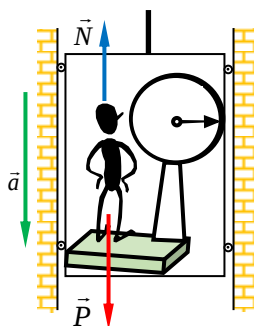


Figura 3-6 c)

c) Procediendo de manera similar al punto b), y considerando la figura 3-6 c), tenemos

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$-P + N = -m a$$

$$N = P - m a = m g - m a = m (g - a)$$

$$N = 70 \text{ Kg} (9,8 - 1,5) \text{ m/s}^2 = 581 \text{ N} = 59,3 \text{ Kg}$$

En este caso la balanza indicará un peso menor del hombre.

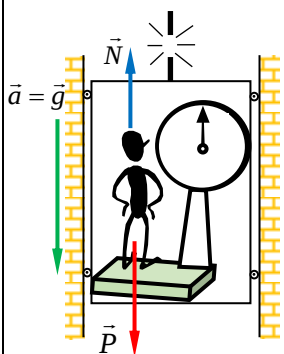


Figura 3-6 d)

d) Procediendo de manera similar a los puntos b) y c), y considerando ahora la figura 3-6 d), se tiene

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$-P + N = -m a = -m g$$

$$N = P - m g = m g - m g = 0$$

En este caso la balanza no indica ningún peso.

3.7. Tercera ley de Newton. Principio de acción y reacción

Consideremos dos cuerpos A y B, figura 3-7, y supongamos que el cuerpo A está aplicando una fuerza sobre el cuerpo B, $\vec{F}_{AB}$; entonces el cuerpo B aplica una fuerza igual y de sentido contrario sobre el cuerpo A, igual a $\vec{F}_{BA}$.

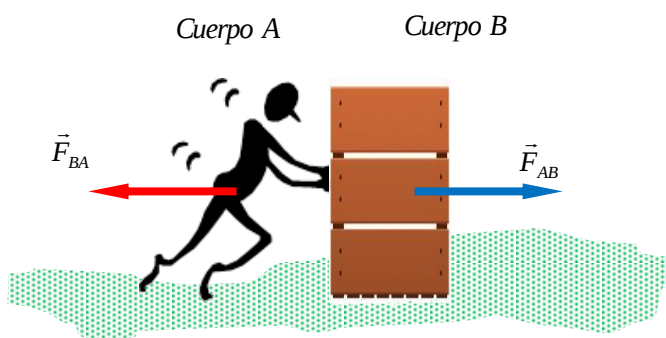


Figura 3-7

Esto nos permite enunciar la tercera ley como: *cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este aplica sobre el primero una fuerza igual y de sentido contrario*, otra forma de definir esta ley es que *la acción es igual y opuesta a la reacción*.

Un detalle importante que considerar en esta ley, ya que suele crear algún tipo de confusión, es que *la acción y la reacción son fuerzas que actúan sobre cuerpos distintos*.

En efecto si las fuerzas de acción y reacción actuaran sobre el mismo cuerpo, *sería imposible el movimiento*, ya que son un par de fuerzas iguales y opuestas.

Ejemplo 3.8: Sea un cuerpo A suspendido mediante una soga. ¿Cuál es la reacción a la tensión $\vec{T}$ que aplica la soga sobre el cuerpo?

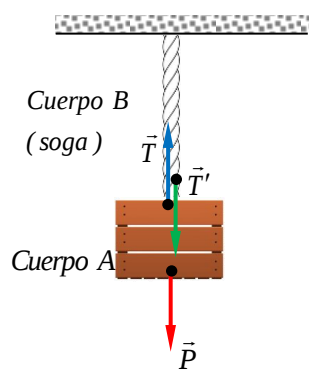


Figura 3-8

En el cuerpo A hay aplicada dos fuerzas el peso $\vec{P}$ y la tensión $\vec{T}$, evidentemente estas dos fuerzas no son de acción y reacción porque están aplicadas al mismo cuerpo.

La reacción de la tensión $\vec{T}$ será una fuerza $\vec{T}'$ que el cuerpo A aplica sobre la soga, por lo tanto $\vec{T}'$ es una fuerza aplicada sobre la soga y no sobre el cuerpo y esta es la reacción a $\vec{T}$.

Entonces, de acuerdo con lo anterior para aplicar la ecuación 3-2, debemos considerar solamente todas las fuerzas aplicadas a un mismo cuerpo.

3.8. Densidad y peso específico

La *densidad* de un cuerpo se define como el cociente entre la masa y el volumen que ocupa el mismo, es decir

$$\delta = \frac{m}{V} \quad (3-8)$$

siendo las unidades más usuales para expresar la densidad

$$\left| \frac{Kg}{m^3} \right| \quad \left| \frac{g}{cm^3} \right|$$

Ejemplo 3.9: Si el agua tiene una densidad $\delta_{H_2O} = 1000 \text{ Kg/m}^3$, por la ecuación 3-8 podemos deducir que 1 m^3 de agua tiene una masa de 1000 Kg

Otras densidades de algunos materiales están expresadas en la Tabla 3-2

TABLA 3-2
Densidad de algunos materiales [Kg/m^3]

Agua (a 0°C y 1 atm)	$1,00 \cdot 10^3$
Hielo	$0,92 \cdot 10^3$
Aluminio	$2,70 \cdot 10^3$
Mercurio	$1,36 \cdot 10^4$
Espuma plástica	$1,00 \cdot 10^2$
Aire (a 0°C y 1 atm)	1,3

La densidad de una sustancia nos da la idea de la mayor o menor masa (Kg) que tiene una sustancia por unidad de volumen (m^3).

Ejemplo 3.10: Un cuerpo de 80 Kg tiene una densidad $\delta = 8300\text{ Kg}/m^3$. ¿Cuál es el volumen del cuerpo?

Datos:

$$m = 80\text{ Kg}$$

$$\delta = 8300\text{ Kg}/m^3$$

Considerando los datos disponibles, para determinar el volumen emplearemos la ecuación 3-8

$$\delta = \frac{m}{V}$$

Incógnita:

$$V = ?$$

$$V = \frac{m}{\delta} = \frac{80\text{ Kg}}{8300\text{ Kg}/m^3} = 0,0096\text{ m}^3$$

$$V = 0,0096\text{ m}^3 \frac{1000\text{ lts}}{1\text{ m}^3} = 9,6\text{ lts}$$

Ejemplo 3.11: Un cubo de oro cuya densidad es $\delta_{AU} = 19300\text{ Kg}/m^3$ tiene 4 cm de arista. ¿Qué peso tiene el cubo?

Datos:

$$\delta_{AU} = 19300\text{ Kg}/m^3$$

$$l = 4\text{ cm} = 0,04\text{ m}$$

$$V(\text{cubo}) = l^3 = 0,04^3\text{ m}^3$$

De acuerdo con los datos, para determinar el peso emplearemos la ecuación 3-8

$$\delta = \frac{m}{V}$$

Incógnita:

$$P = ?$$

$$m = \delta V = \delta l^3 = 19300 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} 0,04^3\text{ m}^3 = 1,23\text{ Kg}$$

$$P = m g = 1,23\text{ Kg } 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 12,054\text{ N (en el Sistema Internacional)}$$

$$P = 12,054\text{ N } \frac{1\text{ Kg}}{9,8\text{ N}} = 1,23\text{ Kg (en el Sistema Técnico)}$$

El *peso específico* de un cuerpo se define como el cociente entre el peso y el volumen de un cuerpo, por lo tanto

$$P_e = \frac{P}{V} \quad (3-9)$$

luego relacionando las ecuaciones 3-8 y 3-9, y sabiendo que el peso es $P = m g$, podemos escribir

$$P_e = \frac{P}{V} = \left(\frac{m}{V} \right) g = \delta g \quad (3-10)$$

de donde resulta que el peso específico es el producto de la densidad por la gravedad.

Cabe aclarar, que si por ejemplo, tomamos los valores de algunos materiales de la Tabla 3-2 en la cual la densidad está expresada en Kg/m^3 (Sistema Internacional), esta misma tabla la podemos transformar en una tabla de pesos específicos, pero en el Sistema Técnico. Por ejemplo, tomemos el caso del agua

	Sistema Internacional	Sistema Técnico
	Densidad	Peso específico
	$[\text{Kg}/\text{m}^3]$	$[\text{Kg}/\text{m}^3]$
Agua	$1,00 \cdot 10^3$	$1,00 \cdot 10^3$

Ejemplo 3.12: El peso específico del cobre es $Pe_{Cu} = 8300 \text{ Kg}/\text{m}^3$. Una esfera maciza construida con ese mismo material pesa 12 Kg , ¿qué radio tiene la esfera?

Datos:

$$Pe_{Cu} = 8300 \text{ Kg}/\text{m}^3$$

$$P = 12 \text{ Kg}$$

Incógnita:

$$r = ?$$

Determinaremos primeramente el volumen de la esfera, para ello emplearemos la ecuación 3-9

$$P_e = \frac{P}{V}$$

$$V = \frac{P}{P_e} = \frac{12 \text{ Kg}}{8300 \text{ Kg}/\text{m}^3} = 1,4458 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

el volumen de una esfera es

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

por lo tanto

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1,4458 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{4\pi}} = 0,0701 \text{ m}$$

$$r = 0,0701 \text{ m} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 7,01 \text{ cm}$$

C. Problemas para el Capítulo 3

PROBLEMA 1

Una fuerza de 10 N actúa durante 10 s sobre un cuerpo de masa igual a 2 Kg . Determinar

- el cambio de velocidad Δv experimentado por el cuerpo
- la aceleración

PROBLEMA 2

Una fuerza de 100 N produce una aceleración de 10 m/s^2 sobre un cuerpo. Determinar su masa.

PROBLEMA 3

Un cuerpo de masa m , acelera a razón de 5 m/s^2 cuando actúa sobre la una fuerza de 5 N . Determinar la fuerza necesaria para acelerarlo a 9 m/s^2 .

PROBLEMA 4

Si una fuerza constante actúa sobre un cuerpo. Determinar cuántas veces aumenta o disminuye su aceleración si:

- se aumenta tres veces la masa.
- se triplica el tiempo que actúa la fuerza.
- se reduce a la mitad el tiempo que actúa la fuerza.
- se reduce su masa a la mitad.

PROBLEMA 5

A una bola de $0,5\text{ Kg}$ originalmente en reposo se lo proporciona una velocidad de 6 m/s en $0,2\text{ s}$. Determinar la fuerza media aplicada a la bola

PROBLEMA 6

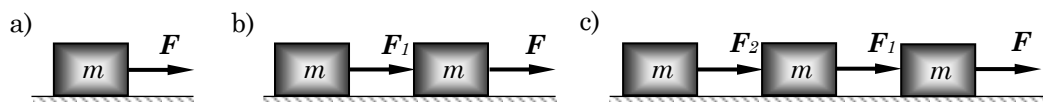
Una fuerza de 5 N produce una aceleración de 8 m/s^2 en un cuerpo de masa m_1 y 24 m/s^2 en un cuerpo de masa m_2 . Determinar la aceleración que produciría sobre las dos masas si estuvieran unidas.

PROBLEMA 7

En la figura se representa el caso de una misma fuerza actuando en situaciones distintas. En a) actúa sobre un cuerpo de masa m . En b) sobre dos de igual masa m cada uno y en c) sobre tres. Suponiendo que no hay rozamiento y que los hilos son inextensibles.

Determinar:

- si se mueven con igual aceleración los cuerpos del caso b)
- ídem para los cuerpos del caso c)
- escribir las ecuaciones que permitan calcular las aceleraciones en cada caso
- la relación que hay entre F y F_1 en el caso c)

**PROBLEMA 8**

Una fuerza de 3 N actúa durante 1 minuto y medio sobre un cuerpo de masa $0,01\text{ Kg}$. Determinar la velocidad y el espacio recorrido en ese tiempo.

PROBLEMA 9

Un tren eléctrico de 20 Tn emplea 20 s en llevar su velocidad de 36 a 72 Km/h . Determinar la fuerza necesaria para lograrlo.

PROBLEMA 10

El tren eléctrico del problema anterior es detenido en 10 s . Determinar la fuerza necesaria para lograrlo.

PROBLEMA 11

Una fuerza actúa sobre un cuerpo de 5 Kg de masa que originalmente está en reposo, haciéndolo recorrer 80 m en 2 s . Determinar la fuerza necesaria para lograrlo.

PROBLEMA 12

Un vehículo de 1960 Kg , parte de reposo. Sobre él actúa una fuerza de 980 N durante 10 s . Determinar la aceleración adquirida y el espacio recorrido.

PROBLEMA 13

Sobre un cuerpo en reposo, actúa una fuerza de 10 N durante 18 s haciéndolo recorrer 450 m . Determinar el peso del cuerpo.

PROBLEMA 14

Determinar el peso y la masa de un cuerpo que, bajo la acción de una fuerza de 75 N adquiere una velocidad de 18 m/s en 2 minutos .

PROBLEMA 15

Determinar la fuerza en Newton, que se deberá aplicar a un cuerpo de 100 Kg en reposo para que su velocidad sea de $0,3\text{ m/s}$ a los 10 s de aplicarla.

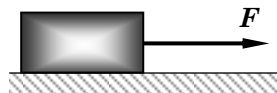
PROBLEMA 16

Determinar la fuerza que actúa sobre un cuerpo de 36 N de peso, que se mueve partiendo de reposo con M.R.U.V. y recorre en 1 minuto una distancia de $68,77\text{ m}$.

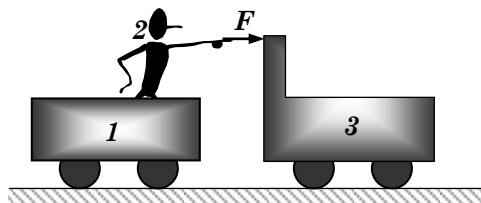
PROBLEMA 17

Una fuerza F , actúa sobre un cuerpo como se muestra en la figura. la masa es de 20 Kg y la magnitud de la fuerza es de 200 N . La superficie en que se desliza es rugosa. El cuerpo inicialmente en reposo recorre en 20 s , una distancia de 400 m . Determinar:

- si actúa solamente la fuerza de 200 N
- la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo
- el espacio que hubiera recorrido si actuase solamente la fuerza F

**PROBLEMA 18**

Determinar la aceleración del movimiento del carrito 1 y el hombre 2 y la aceleración del movimiento del carrito 3, cuando el hombre por medio de una varilla ejerce una fuerza constante F sobre el carro 3. Sugerencia: utilice el principio de acción y reacción. $F = 500\text{ N}$, $m_1 = 100\text{ Kg}$, $m_2 = 65\text{ Kg}$, $m_3 = 350\text{ Kg}$.



PROBLEMA 19

Un hombre cuyo peso es de 600 N , aborda un ascensor en el 15º piso de un edificio de 100 pisos y se sube a una balanza. Cuando el elevador empieza a moverse, él observa que la balanza indica 750 N durante 5 s , 600 N durante 20 s , 480 N durante 5 s , instante en que el elevador se detiene. Determinar:

- si el elevador se encuentra en la parte alta o baja del edificio.
- el tiempo que viajó el ascensor.

PROBLEMA 20

Un cubo metálico tiene 5 cm de arista y una masa de 1 Kg . Determinar el peso específico y la densidad del metal.

PROBLEMA 21

La densidad del mercurio es de $13600\text{ Kg}/\text{m}^3$. Determinar el volumen que ocupa 10 N de mercurio.

PROBLEMA 22

Determinar el peso de mercurio encerrado en un tubo cilíndrico de 5 cm de radio si la altura de la columna de mercurio es de 16 cm .

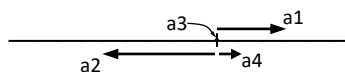
PROBLEMA 23

La densidad del oro es $19300\text{ Kg}/\text{m}^3$ y la de la plata $10500\text{ Kg}/\text{m}^3$. Se tiene muestras de igual volumen de cada uno de dichos elementos. Al ser colocados en una balanza son necesarios 88 g para establecer el equilibrio en la balanza. Determinar:

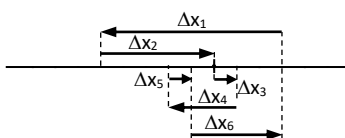
- a que metal se le deben colocar los 88 g para lograr el equilibrio.
- el volumen de cada muestra.
- el peso específico del oro y de la plata.

D. Repuestas a los problemas impares**Capítulo 1**

1.1 a)



- b) $\Delta x_1 = -80 \text{ m}$, $\Delta x_2 = 50 \text{ m}$,
 $\Delta x_3 = 10 \text{ m}$, $\Delta x_4 = -30 \text{ m}$,
 $\Delta x_5 = 10 \text{ m}$, $\Delta x_6 = 40 \text{ m}$



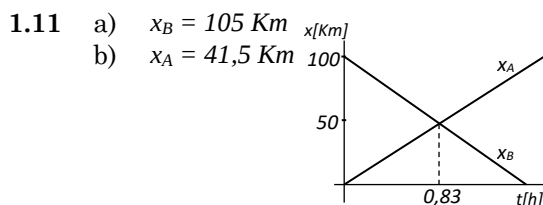
- c) $\Delta x = 0 \text{ m}$
d) $X = 220 \text{ m}$
e) El espacio es la suma en valor absoluto de los desplazamientos. El desplazamiento es un cambio de posición ($x_{\text{final}} - x_{\text{inicial}}$) y no depende del sistema de referencia adoptado.

- 1.3 a) Ambas corresponden a un M.R.U.
 $v(\text{velocidad}) = f(t)$, $x(\text{espacio}) = f(t)$
b) $v = 2 \text{ [m/s]}$, $x_0 = 2 \text{ [m]}$

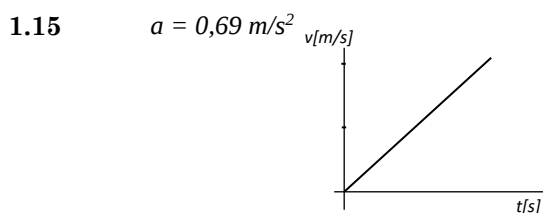
- 1.5 a) M.R.U. ($v = \text{cte}$)
b) M.R.U.A. ($a = \text{cte}$)
c) M.R.U.A. ($a = \text{cte}$)
d) M.R.U. ($v = \text{cte}$)

- 1.7 $v = 9,26 \text{ m/s}$, $v = 33,33 \text{ Km/h}$

- 1.9 $x = 216 \text{ Km}$



- 1.13 a) La gráfica Nro. 2
b) La gráfica Nro. 3
c) Las gráficas Nro. 1 y 4



- 1.17 $a = -1,2 \text{ m/s}^2$, $x = 135 \text{ m}$

- 1.19 a) $v = 15 \text{ m/s}$

- b) $v = 24 \text{ m/s}$
c) $x = 54 \text{ m}$

- 1.21 $a = 4 \text{ m/s}^2$, $v = 80 \text{ m/s}$

- 1.23 $x = 2 \text{ m}$, $t = 4,47 \text{ s}$

- 1.25 $h = 490 \text{ m}$

- 1.27 $t = 2,83 \text{ s}$

- 1.29 $v = 9,9 \text{ m/s}$, $t = 1,01 \text{ s}$

- 1.31 $t = 5 \text{ s}$

- 1.33 a) $h = 78,4 \text{ m}$
b) $t = 4 \text{ s}$
c) $v = 39,2 \text{ m/s}$
d) $t = 4 \text{ s}$

- 1.35 a) $h_A = 1002 \text{ m}$, $h_B = 490 \text{ m}$
b) $t_A = 10 \text{ s}$, $t_B = 14,3 \text{ s}$

Capítulo 2

- 2.1 a) $|\vec{B} + \vec{D}| = 14,33 \text{ u}$, $\alpha_{B+D} = 27,37^\circ$
b) $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| = 5,52 \text{ u}$, $\alpha_{A+B+C} = 54,65^\circ$
c) $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}| = 7,81 \text{ u}$
 $\alpha_{A+B+C+D} = 39,80^\circ$
d) $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}| = 4,3 \text{ u}$
 $\alpha_{A+B+C+D} = 0,93^\circ$
e) $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}| = 7,81 \text{ u}$
 $\alpha_{A+B+C+D} = 69,77^\circ$
f) $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}| = 19,3 \text{ u}$
 $\alpha_{A+B+C+D} = 96,7^\circ$

- 2.3 $|\vec{R}| = 7$, $\alpha_R = 38,21^\circ$

- 2.5 $|\vec{R}| = 36,9 \text{ unidades}$, $\alpha_R = 22,5^\circ$

2.7 Idem Problema 2.1

- a) $R_x = 12,73 \text{ u}$, $R_y = 6,59 \text{ u}$
b) $R_x = 3,19 \text{ u}$, $R_y = 4,51 \text{ u}$
c) $R_x = 6,0 \text{ u}$, $R_y = 5,0 \text{ u}$
d) $R_x = 4,3 \text{ u}$, $R_y = 0,07 \text{ u}$
e) $R_x = 2,7 \text{ u}$, $R_y = 7,33 \text{ u}$
f) $R_x = -2,26 \text{ u}$, $R_y = 19,18 \text{ u}$

- 2.9** $|Distancia| = 9,43 \text{ Km}$, $\alpha = E32^\circ N$
- 2.11** $|\vec{A} - \vec{B}| = 4,36 \text{ u}$, $\alpha_{A-B} = -83,29^\circ$
- 2.13** a) $R_x = -2,73 \text{ u}$, $R_y = 10,73 \text{ u}$
 $|\vec{B} - \vec{D}| = 11,07 \text{ u}$, $\alpha_{B-D} = 104,27^\circ$
 b) $R_x = -1,81 \text{ u}$, $R_y = 5,85 \text{ u}$
 $|\vec{C} - \vec{A}| = 6,12 \text{ u}$, $\alpha_{C-A} = 107,19^\circ$
 c) $R_x = -2,0 \text{ u}$, $R_y = 5,0 \text{ u}$
 $|\vec{C} - \vec{A}| = 5,38 \text{ u}$, $\alpha_{C-A} = 111,8^\circ$
 d) $R_x = 4,43 \text{ u}$, $R_y = 0,53 \text{ u}$
 $|\vec{D} - \vec{A}| = 4,34 \text{ u}$, $\alpha_{D-A} = 4,35^\circ$
 e) $R_x = 11,93 \text{ u}$, $R_y = -4,66 \text{ u}$
 $|\vec{D} - \vec{B}| = 12,8 \text{ u}$, $\alpha_{D-B} = -21,33^\circ$
 f) $R_x = 5,0 \text{ u}$, $R_y = -10,66 \text{ u}$
 $|\vec{C} - \vec{B}| = 11,77 \text{ u}$, $\alpha_{C-B} = -64,87^\circ$
- 2.15** $|\vec{A}| = 9,43$, $\alpha_A = 302^\circ$
- 2.17** $|\vec{R}| = 776,7 \text{ N}$, $\alpha_R = 58,15^\circ$
- 2.19** $T_{AB} = 998 \text{ N}$, $T_{BC} = 1411 \text{ N}$
- 2.21** $T_1 = 72,57 \text{ N}$, $T_2 = 36,28 \text{ N}$
- 2.23** $T = 2877,28 \text{ N}$
- 2.25** a) $F_{agua} = 693 \text{ N}$
 b) $F_{cable} = 1046 \text{ N}$
- 2.27** $M_A = -353,5 \text{ Nm}$, $M_B = 0 \text{ Nm}$,
 $M_C = 250 \text{ Nm}$
- 2.29** $M_F = 1039,2 \text{ Nm}$, $M_{F1} = -173,2 \text{ Nm}$,
 $M_{F2} = -4156,9 \text{ Nm}$
- 2.31** $F = 60 \text{ N}$, $x = 0,33 \text{ m}$
- iii) b) $F - F_1 = m a$, $F_1 = m a$
 c) $F - F_1 = m a$, $F_1 - F_2 = m a$,
 $F_2 = m a$
 iv) $F/F_1 = 3/2$
- 3.9** $F = 10000 \text{ N}$
- 3.11** $F = 200 \text{ N}$
- 3.13** $P = 35,3 \text{ N}$
- 3.15** $F = 3 \text{ N}$
- 3.17** a) No, además de la fuerza F actúa la fuerza de rozamiento F_r .
 b) $F = 40 \text{ N}$
 c) $x = 2000 \text{ m}$
- 3.19** a) El elevador se encuentra por encima, piso 15°
 b) $h = 24,5 \text{ m}$
- 3.21** $V = 0,000075 \text{ m}^3$
- 3.23** a) A la plata
 b) $V = 0,00001 \text{ m}^3$
 c) $Pe_{Au} = 189140 \text{ N/m}^3$
 $Pe_{Ag} = 102900 \text{ N/m}^3$

Capítulo 3

- 3.1** a) $\Delta v = 50 \text{ m/s}$
 b) $a = 5 \text{ m/s}^2$
- 3.3** $F = 9 \text{ N}$
- 3.5** $F = 15 \text{ N}$
- 3.7** i) Si
 ii) Si

E. Bibliografía

- Giancoli, D. "Física. Principios con aplicaciones. Volumen 1". Editorial Prentice Hall, 2006
- Hewitt, P. "Física Conceptual". Editorial Pearson, 2007
- Magallanes, C. "Física – Guía de Estudio Curso de Apoyo". Editorial UNSL, 1984.
- Reese, R. "Física Universitaria Volumen I". Editorial Thomson, 2002
- Resnick R., Halliday D., Krane K. "Física Volumen I". Editorial CECSA, 2006
- Sears, F., Zemansky M., Young H., Freedman R. "Física Universitaria Volumen 1". Editorial Pearson, 2004
- Serway R., Jewett J. "Física para ciencias e ingeniería". Editorial Cengage Learning, 2008
- Strother G. "Física aplicada a las ciencias de la salud". Editorial McGraw Hill, 1980
- Tippens, P. "Física. Conceptos y aplicaciones". Editorial McGraw Hill, 1999.

